

Presentazione della tesi di Dottorato
“Numerical Modeling of Defective Boundary Problems in Incompressible Fluid-Dynamics - Applications to Computational Haemodynamics” - Autore: Christian Vergara

1. – Il problema a flussi imposti

Nell’ambito di problemi di fluidodinamica modellati dalle equazioni di Navier-Stokes (NS), si presenta il problema di voler trattare delle condizioni al bordo integrali su m superfici artificiali Γ_i del tipo

$$(1) \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = Q_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

dove $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ è il campo di velocità, \mathbf{n} la normale uscente da Γ_i e $Q_i(t)$ un dato. È

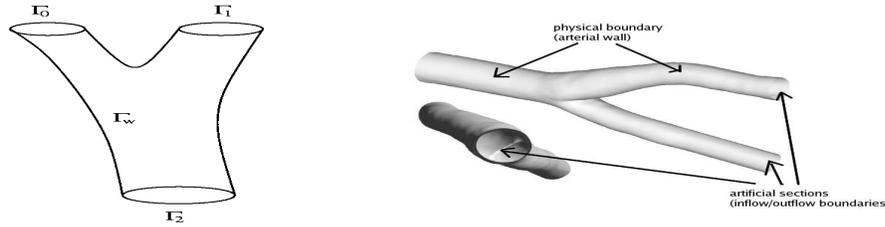


Figura 1: Esempio di dominio Ω troncato artificialmente: distretto vascolare. Si distingue il bordo “fisico” Γ_w e le sezioni “artificiali” Γ_i .

noto che il problema differenziale così ottenuto non è ben posto. Nella letteratura ingegneristica questo problema è stato comunemente risolto prescrivendo un profilo arbitrario di velocità tale per cui il flusso fosse pari a Q_i . Per superare l’ambiguità del precedente approccio ingegneristico, in [1] è stato proposto, per il problema di Stokes stazionario, di introdurre un moltiplicatore di Lagrange per ogni condizione di flusso (1) e di trattare perciò queste ultime come vincoli che la soluzione deve soddisfare. In questo lavoro si è estesa tale idea al problema non lineare e non stazionario, introducendo una opportuna funzione Lagrangiana da minimizzare. Si è ottenuta la seguente *formulazione aumentata* (si veda [3]):

Problema 1 *Dati $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $\mathbf{f}(t) \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ e $\mathbf{Q}(t) \in (C^0([0, T]))^m$, trovare $\mathbf{u}(t) \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $\lambda \in (L^2(0, T))^m$ tali che*

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{\Gamma_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ b(q, \mathbf{u}) = 0, \\ \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = Q_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $q \in L^2(\Omega)$, dove \mathbf{V} è un opportuno sottospazio di $\mathbf{H}^1(\Omega)$, p è la pressione e $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ le classiche forme bilineari associate al problema di NS.

Abbiamo inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 1 Per dati Q_i sufficientemente regolari e con $\sum_i |Q_i|$ e $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}$ abbastanza piccoli, il Problema 1 è localmente (in tempo) ben posto, cioè esiste un $T^* > 0$ tale per cui una soluzione $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \{\lambda_i\}_{i=1, \dots, m})$ esiste per ogni $t \in [0, T^*]$.

Per la dimostrazione si è usato il classico Teorema di Brezzi, mostrando che vale una condizione *inf-sup* per il problema aumentato (2).

2. – Discretizzazione numerica

Per la risoluzione numerica del Problema 1 sono state proposte 3 strategie. La prima (schema I) è basata su delle iterazioni di punto fisso e si è rivelata molto costosa. La seconda (schema II) è basata su uno splitting algebrico della matrice aumentata ottenuta dalla formulazione debole, in cui il calcolo di velocità e pressione è separato da quello dei moltiplicatori di Lagrange. In questo modo, è stato dimostrato che il problema a flussi imposti può essere risolto con $m + 1$ problemi NS con condizioni al bordo “classiche”, in particolare di Neumann. Quindi, questo algoritmo permette di utilizzare dei codici di calcolo pre-esistenti e di non implementare *ex-novo* il problema aumentato. Con tale strategia si sono ritrovate le soluzioni analitiche di Poiseuille e di Womersley (si veda Fig. 2)

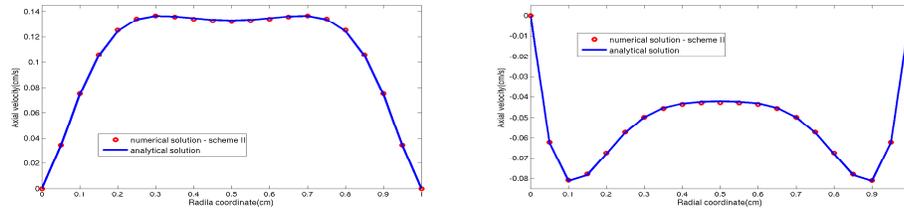


Figura 2: Soluzione di Womersley - $t = 2.1$ s (sinistra) e $t = 2.3$ s (destra).

Tuttavia, la precedente strategia presenta l’inconveniente degli alti costi computazionali. Perciò è stato proposto un terzo algoritmo (schema III), basato su uno splitting differenziale inesatto del problema aumentato (2), che viene in questo modo decomposto in m problemi stazionari (e quindi risolti *una tantum*) e un problema non stazionario a flusso nullo. L’inesattezza di tale algoritmo consiste nel risolvere quest’ultimo problema imponendo un profilo di velocità nullo. Così, stiamo utilizzando a tutti gli effetti l’approccio ingegneristico. Il vantaggio risiede nella seguente stima *a priori* (si veda [4]):

TEOREMA 1 Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che $\text{dist}(\Omega', \Gamma) \geq \bar{d}$. Se il dominio Ω è sufficientemente regolare, vale la seguente stima per l’errore \mathbf{E}

$$\int_0^T \|\mathbf{E}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega')}^2 ds \leq C(t, Re) e^{-\bar{d}}.$$

La costante C cresce con il numero di Reynolds Re , confermando quanto era già empiricamente noto dalla letteratura ingegneristica. Di conseguenza ci si aspetta piccoli errori utilizzando lo schema III poichè Re è prossimo a zero vicino alle sezioni artificiali (si veda Fig. (3)). Di conseguenza, lo schema III ha il vantaggio di richiedere la risoluzione di un solo problema differenziale ad ogni passo temporale (rispetto agli $m + 1$ utilizzati nello schema II) introducendo un errore che è il più piccolo fra tutti quelli possibili imponendo un profilo di velocità. In Fig. 4 si sono

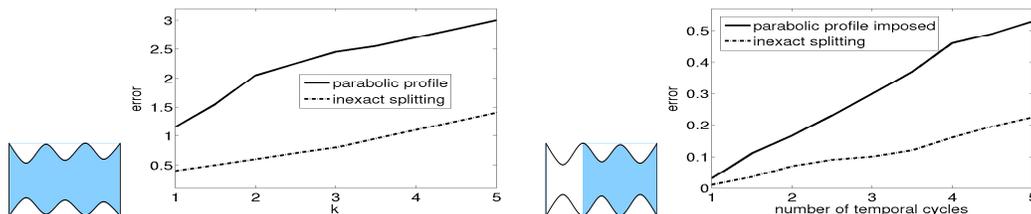


Figura 3: Errore in norma $L^2(L^2)$ in tutto il dominio (sinistra) e in una porzione interna (destra), usando schema III e l’approccio ingegneristico.

riportate le soluzioni in un dominio ottenuto da immagini biomediche rappresentante la carotide. Si noti come l’errore commesso con lo schema III sia confinato in una piccolissima regione vicino ai bordi, mentre quello commesso con l’approccio ingegneristico sia presente anche all’interno.

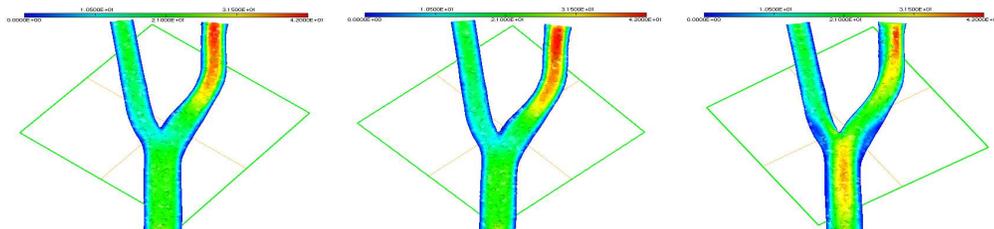


Figura 4: Soluzione 3D in un dominio rappresentante la carotide. Schema II (sinistra), schema III (centro) e approccio ingegneristico (destra).

3. – Un approccio duale basato sulla teoria del controllo

Un secondo tipo di condizione al bordo integrale spesso presente in emodinamica computazionale è quella che prescrive la pressione media:

$$(3) \quad \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p d\gamma = P_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

Si può mostrare che un approccio aumentato per trattare tali condizioni porta e delle condizioni al bordo fisicamente incompatibili. Di conseguenza, si è studiato un approccio alternativo che permettesse di trattare allo stesso tempo le condizioni deficitarie (1) e (3). In particolare, per il problema a pressione media imposta, si è introdotto il funzionale

$$J_P(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p d\gamma - P_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} \|\nabla \mathbf{u} \mathbf{a}_i\|_d^2 d\gamma,$$

e si è considerata una minimizzazione vincolata dalle equazioni di NS, in cui le variabili controllo sono le condizioni di Neumann \mathbf{k}_j da imporre su Γ_j . Si fa notare come il secondo addendo del funzionale sia stato introdotto per tenere in conto di eventuali domini in cui la direzione assiale \mathbf{a}_i non sia parallela alla normale uscente (si veda [2]). Nel caso lineare e stazionario si ottiene il seguente sistema (per gli altri casi si veda [2]):

Problema 2 *Dati $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ e $P_j \in R$, $j = 0, \dots, m$, trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $p \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{l}_u \in \mathbf{V}$, $l_p \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{k}_j \in \mathbf{L}^2(\Gamma_j)$, $j = 0, \dots, m$, tali che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_i)$, $i = 0, \dots, m$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) \left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}(\mathbf{k}_j), \mathbf{v}) + b(p(\mathbf{k}_j), \mathbf{v}) + \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v} d\gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0, \\ b(q, \mathbf{u}(\mathbf{k}_j)) = 0, \end{array} \right. \\ (A) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{k}_j) \mathbf{a}_i) \cdot (\nabla \mathbf{v} \mathbf{a}_i) d\gamma + a(\mathbf{l}_u, \mathbf{v}) + b(l_p, \mathbf{v}) = 0, \\ \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p(\mathbf{k}_j) d\gamma - P_i \right) \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} q d\gamma + b(q, \mathbf{l}_u) = 0, \end{array} \right. \\ (C_i) \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{t} \cdot \mathbf{l}_u d\gamma = 0, \quad i = 0, \dots, m \end{array} \right.$$

Per la risoluzione numerica del Problema 2, si è proposto un approccio iterativo che disaccoppia i due problemi di Stokes (P) e (A) e usa le condizioni di ottimalità (C) per aggiornare la variabili di controllo. Sulla base di questo algoritmo è stata inoltre dimostrata la buona posizione del Problema 2 utilizzando una tecnica di punto fisso (si veda [2]). Anche in questo caso si è ritrovata la soluzione di Womersley (si veda [2]).

Riferimenti bibliografici

- [1] Formaggia L., Gerbeau J.F., Nobile F., Quarteroni A., *Numerical treatment of Defective Boundary Conditions for the Navier-Stokes equation*, SIAM J. Num. Anal., **40**(1) (2001), 376-401.
- [2] Formaggia L., Veneziani A., Vergara C., *A new approach to the numerical solution of defective boundary problems in incompressible fluid dynamics*, SIAM J. Num. Anal., **46**(6) (2008), 2769-2794.
- [3] Veneziani A., Vergara C., *Flow rate defective boundary conditions in haemodinamics simulations*, Int. Journ. Num. Meth. Fluids, **47** (2005), 803-816.
- [4] Veneziani A., Vergara C., *An approximate method for solving incompressible Navier-Stokes problem with flow rate conditions*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 196(9-12) (2007), 1685-1700.

Dottorato in Ingegneria Matematica (sede amministrativa, Dip. di Matematica, Politecnico di Milano) - Ciclo XVIII

Direttore di ricerca: Prof. A. Veneziani, Politecnico di Milano