

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Corso di Laurea in Ingegneria Matematica



MODELLI ED ALGORITMI
PER LO STUDIO DELL'INTERAZIONE
FLUIDO-STRUTTURA NELL'AMBITO
DELL'EMODINAMICA

Relatore: Dott. Fabio Nobile
Correlatore: Dott. Christian Vergara

Susanna Carcano, matr. 668421

Maurizio Mansueto Cogliati, matr. 669795

Anno Accademico 2006-2007

Ringraziamenti

Vogliamo ringraziare il Dott. Fabio Nobile per averci proposto un lavoro che si è rivelato giorno dopo giorno sempre più interessante e coinvolgente e che ci ha dato l'opportunità di mettere alla prova le conoscenze acquisite in questi tre anni di studio ed allo stesso tempo di incrementare la passione per la matematica applicata.

Un doveroso e sentito *Grazie* a Christian, la nostra guida in questi mesi. La sua disponibilità e pazienza è stata indispensabile per dissipare ogni dubbio: egli è stato sempre presente con i suoi preziosi consigli, grazie ai quali siamo riusciti a portare a compimento questo lavoro.

Ringraziamo le nostre famiglie per il sostegno morale (e non solo!) e per l'incoraggiamento che ci hanno dato in questi anni nei momenti più difficili.

Un grazie speciale anche ai numerosi amici con i quali abbiamo condiviso tantissimi momenti ed esperienze sia di gioia che di sconforto: Leonardo, Roberta, Elisa, Alessandra, Paola e Marialisa, Marco, Sara, Daniele, Alessia, Paolo, Andrea. La loro amicizia ed il loro affetto si è rivelato fondamentale.

Non per ultimi ringraziamo tutti (ma proprio tutti) i nostri compagni di corso: Cico, Davide, Ema, Ale, Laura, Claudia... Insieme siamo riusciti a superare tutti gli ostacoli, anche i più duri (...) incontrati fino ad ora. Siamo certi che insieme a loro affronteremo anche quelli che ci aspettano nei prossimi mesi.

Indice

1	Modellazione del problema di interazione fluido-struttura	5
1.1	Modellazione della struttura	5
1.1.1	Il modello nell'ipotesi di geometria cilindrica	8
1.2	Modellazione del fluido	10
1.3	Il problema accoppiato fluido-struttura	12
1.4	Lo schema di Robin	15
1.5	Le condizioni al bordo	20
2	Un modello per arteria con protesi e tapering	23
2.1	Possibili applicazioni del modello	23
2.2	Il modello matematico per la protesi	26
2.3	Modello di arteria con tapering	29
3	L'accoppiamento 3D/0D	31
3.1	La necessità di un modello multiscala	31
3.2	Il modello a parametri concentrati per il vaso sanguigno	33
3.3	Il modello a parametri concentrati per il sistema cardiocircolatorio	40
3.4	L'accoppiamento dei modelli 3D e 0D	43
4	Gli algoritmi numerici	48
4.1	L'algoritmo di interazione fluido-struttura	48
4.2	L'algoritmo di accoppiamento 3D/0D	51
5	I risultati numerici	53
5.1	Arteria semplice	54
5.2	Arteria con protesi vascolare	62
5.3	Arteria con restringimento	67
5.4	Accoppiamento 3D/0D	77
	Bibliografia	81

Introduzione

Fin dai primi anni '80 si è sviluppato un grande interesse nell'ambito della modellazione matematica e numerica del sistema cardiocircolatorio umano e, in particolare, esiste una vasta attività di ricerca interessata alla simulazione tridimensionale relativa a problemi di interazione fluido-struttura. Infatti è proprio il meccanismo di interazione esistente tra le pareti vascolari ed il sangue che permette al flusso ematico di raggiungere, partendo dal cuore, ogni tessuto ed ogni organo del corpo umano. L'interesse nello sviluppo di modelli sempre più completi, raffinati ed efficaci per lo studio della circolazione è legato innanzitutto alle numerose patologie che, nonostante le capacità compensatorie del sistema cardiovascolare, sono sempre più diffuse ed alle applicazioni in ambito biomedico ed ingegneristico che tali modelli potrebbero avere. L'obiettivo ultimo di tali ricerche potrebbe essere quello di ottenere una descrizione così dettagliata dei fenomeni relativi all'emodinamica da poter ricavare dalle simulazioni informazioni utili per poter fare valutazioni anche riguardanti specifici casi clinici.

L'elevata complessità del problema di interazione fluido-struttura ha spinto i ricercatori a formulare modelli semplificati ed a sviluppare dunque algoritmi numerici efficienti seguendo differenti strategie. L'approccio più comunemente adottato consiste nella risoluzione consecutiva dei due sottoproblemi fluido e struttura accoppiando solutori già esistenti. Per la risoluzione del problema accoppiato sono stati sviluppati sia algoritmi espliciti, sia algoritmi impliciti. In particolare, in questo lavoro si è scelto di adottare una strategia presentata in [20] che, per diversi aspetti che si andranno a sottolineare, risulta essere maggiormente efficiente.

Nel primo Capitolo questa tesi presenta innanzitutto il modello di struttura deformabile proposto in [20], adatto a descrivere la dinamica di una arteria ed un modello di fluido, basato sulle equazioni di Navier-Stokes, in grado di descrivere la dinamica del sangue. In seguito viene formulato il problema accoppiato

fluido-struttura nel quale il modello di struttura è incluso nelle equazioni per il fluido sotto forma di condizione al bordo di Robin (si veda [20]). Viene inoltre trattato ampiamente il problema riguardante l'imposizione di opportune condizioni al bordo. Il meccanismo di interazione tra fluido e struttura nell'ambito della dinamica vascolare infatti dà origine a onde di pressione che si propagano lungo il vaso. Dal punto di vista numerico, dunque, si rivela necessaria l'imposizione di condizioni al bordo assorbenti in corrispondenza delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido che impediscano l'insorgere di riflessioni spurie. Per risolvere tale problema adotteremo una strategia che prevede l'imposizione di opportune condizioni assorbenti di tipo impedenza (si veda [20]).

Nel secondo Capitolo viene presentata una particolare applicazione del modello fluido-struttura descritto, ovvero la modellazione di una protesi vascolare e di una stenosi. L'obiettivo è quello di simulare gli effetti della presenza di una stenosi o di una protesi vascolare lungo l'arteria. La loro presenza, infatti, si suppone che possa alterare in modo significativo la dinamica del sangue, sia a livello locale, sia a livello globale.

Nel terzo Capitolo si propone una strategia alternativa a quella proposta nel primo Capitolo per l'imposizione di condizioni al bordo assorbenti per il modello fluido-struttura, sulla base dell'interconnessione esistente tra la dinamica locale e la dinamica globale nel sistema cardiocircolatorio. Si propone, dunque, di adottare un approccio multiscala e di accoppiare il modello 3D ampiamente discusso con un modello a parametri concentrati (detto anche 0D) dell'intero sistema circolatorio che sia in grado di prescrivere opportune condizioni al bordo all'interfaccia. In particolare si vuole prestare attenzione alle diverse problematiche di tipo matematico e numerico legate all'accoppiamento dei due modelli 3D e 0D.

Nel quarto Capitolo vengono riportati in modo schematico gli algoritmi numerici adottati sia per la risoluzione del modello fluido-struttura, sia per la risoluzione del modello accoppiato 3D/0D.

Nell'ultimo Capitolo vengono infine riportati i risultati più significativi ricavati dalle simulazioni numeriche eseguite: si vogliono evidenziare sia aspetti matematico-numeric, sia aspetti bioingegneristici. Le simulazioni relative al modello fluido-struttura sono state ottenute con un codice già esistente implementato in Freefem++, il quale è stato da noi successivamente modificato ed ampliato opportunamente per simulare la presenza di una protesi vascolare e di un restringimento naturale del lume dell'arteria (detto anche tapering) ed infine per risolvere il problema accoppiato 3D/0D discusso nel Capitolo 4.

Capitolo 1

Modellazione del problema di interazione fluido-struttura

1.1 Modellazione della struttura

Si assuma che la struttura si comporti come una membrana, vale a dire come un guscio sottile ed elastico, il cui spessore può esser trascurato: tale ipotesi ci permette di utilizzare un modello bidimensionale. Si riporta di seguito il modello algebrico-inerziale per una membrana proposto in [20]. Si parta dal modello di Koiter per una membrana non soggetta a sforzo di taglio (si veda [13, 14]). La posizione di riferimento Γ^0 della membrana è identificata dalla seguente mappa

$$\phi : \omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma^0 \subset \mathbb{R}^3, \quad \phi = \phi(\xi_1, \xi_2), \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \omega.$$

La mappa ϕ mostrata in Figura 1.1 introduce un sistema locale di coordinate curvilinee, la cui base è data da

$$\mathbf{n}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{n}_3 = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}.$$

I vettori \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 definiscono il piano tangente alla superficie Γ^0 nel punto (ξ_1, ξ_2) , mentre \mathbf{n}_3 è il versore normale al piano generato dai vettori \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 .

Si assuma che la mappa ϕ sia regolare, cioè che i vettori \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 siano linearmente indipendenti in tutti i punti $(\xi_1, \xi_2) \in \omega$. Si indichino con

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha} = -\mathbf{n}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_3}{\partial \xi_i} = \mathbf{n}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial \xi_\alpha} \quad (1.1)$$

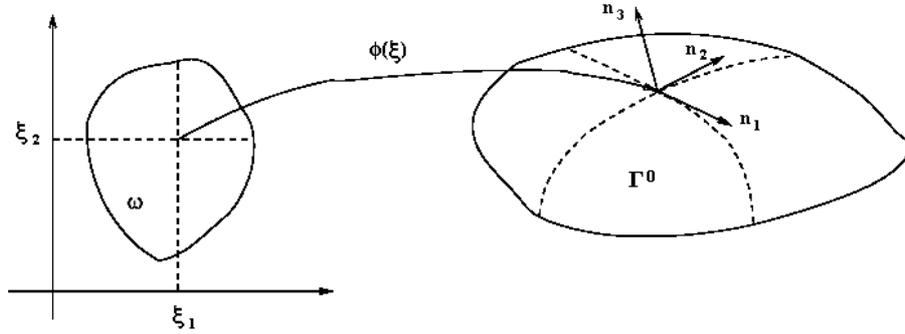


Figura 1.1: La mappa regolare ϕ

il primo e il secondo tensore fondamentale della superficie Γ^0 . I pedici indicati da lettere greche variano nell'insieme $\{1,2\}$ mentre quelli indicati da caratteri latini nell'insieme $\{1,2,3\}$.

Il modello semplificato che verrà utilizzato successivamente è basato sulle seguenti ipotesi:

1. legame costitutivo sforzo-deformazione lineare e materiale isotropo - omogeneo;
2. piccole deformazioni;
3. sezioni normali alla superficie si mantengono tali dopo la deformazione;
4. spostamenti unicamente normali lungo la direzione del versore \mathbf{n}_3 .

Si consideri il modello di membrana di Koiter per piccole deformazioni e si trascuri il termine di flessione (o bending). Il modello è descritto dalla seguente equazione, scritta in formulazione debole, in cui $\boldsymbol{\eta} : \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresenta lo spostamento della membrana ed \mathbf{f}_s il termine forzante. Il problema consiste nel trovare $\boldsymbol{\eta}$ in un opportuno spazio funzionale \mathbf{K} tale che, per ogni $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{K}$

$$\int_{\Gamma^0} \rho_s h_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\chi} d\gamma + \int_{\Gamma^0} h_s E^{\alpha\beta\lambda\delta} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \gamma_{\lambda\delta}(\boldsymbol{\chi}) d\gamma = \int_{\Gamma^0} \mathbf{f}_s \cdot \boldsymbol{\chi} d\gamma, \quad (1.2)$$

dove ρ_s e h_s sono la densità e lo spessore della struttura e dove si è usata la notazione di Einstein di saturazione degli indici. Le quantità $E^{\alpha\beta\lambda\delta}$ e $\gamma_{\alpha\beta}$ sono

rispettivamente il tensore di elasticità, il quale dipende dal modulo di Young E e dal coefficiente di Poisson ν del materiale, e il tensore relativo al cambio di metrica. La scelta dello spazio funzionale \mathbf{K} dipende dalle condizioni al bordo imposte sullo spostamento $\boldsymbol{\eta}$. E' inoltre opportuno sottolineare che le equazioni sono scritte nella configurazione di riferimento Γ^0 .

Ora, se si restringe il movimento della membrana solamente lungo la direzione normale, imponendo che lo spostamento della struttura sia della forma $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, \tilde{\eta})$, il modello introdotto precedentemente può esser ulteriormente semplificato. Il modello di struttura, in seguito a questa assunzione, si riduce ad una semplice equazione scalare in cui compare solo la componente $\tilde{\eta}$ (si veda [20]):

$$\begin{cases} \rho_s h_s \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + \beta \tilde{\eta} = \tilde{f}_s & \text{in } (0, T) \times \Gamma^0, \\ \tilde{\eta}|_{t=0} = \eta_0 & \text{in } \Gamma^0, \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}|_{t=0} = \eta_v & \text{in } \Gamma^0, \end{cases} \quad (1.3)$$

dove

$$\beta = \beta(\xi_1, \xi_2) = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} ((1 - \nu) B_\beta^\lambda B_\lambda^\beta + \nu B_\beta^\beta B_\lambda^\lambda),$$

η_0 e η_v sono le condizioni iniziali e $B_\beta^\lambda = A^{\alpha\lambda} B_{\alpha\beta}$. E' possibile scrivere β anche in funzione delle curvatures della superficie Γ^0 : in particolare, se si introducono la curvatura principale

$$\rho_1 := \frac{1}{2} B_\alpha^\alpha$$

e la curvatura gaussiana

$$\rho_2 := \det(B_\beta^\lambda) = 2\rho_1^2 - \frac{B_\lambda^\beta B_\beta^\lambda}{2},$$

allora β può esser scritto come

$$\beta = \beta(\xi_1, \xi_2) = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} (4\rho_1^2 - 2(1 - \nu)\rho_2). \quad (1.4)$$

Il modello (1.3) è applicabile a qualsiasi superficie identificabile da una mappa regolare ϕ e ciò rende il modello particolarmente interessante ed adatto a numerose applicazioni ingegneristiche. Si osserva che si è ricavato un modello finale nel quale non compare alcun operatore differenziale dipendente dallo spazio, dunque non sono necessarie condizioni al contorno.

In seguito il modello dato da (1.3) e (1.4) verrà denominato *modello algebrico-inerziale* o più semplicemente *modello algebrico* nel caso in cui $\rho_s = 0$.

1.1.1 Il modello nell'ipotesi di geometria cilindrica

Si consideri la superficie cilindrica mostrata in Figura 1.2 definita da

$$\Gamma^0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = R_0 \cos \theta, y = R_0 \sin \theta, \forall \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}$$

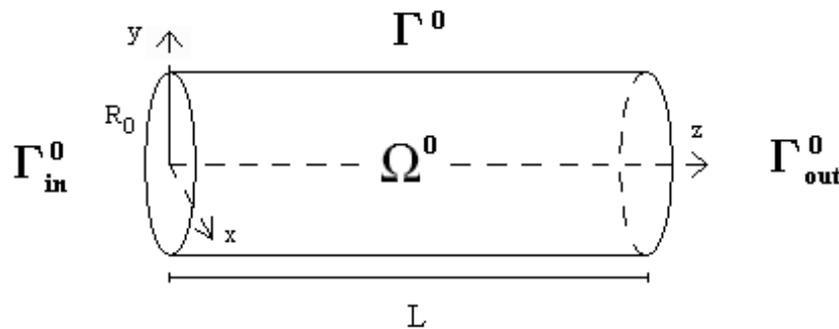


Figura 1.2: La superficie cilindrica Γ_0

dove R_0 ed L sono rispettivamente il raggio iniziale e la lunghezza del cilindro. In questo caso la superficie Γ^0 può essere ottenuta attraverso la mappa

$$\phi = \begin{bmatrix} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{bmatrix}.$$

La base covariante è data da

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il primo e il secondo tensore fondamentale sono

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$A^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene

$$B_{\beta}^{\alpha} = A^{\alpha\lambda} B_{\lambda\beta} = \begin{bmatrix} -1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\beta = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2}. \quad (1.5)$$

Si osservi che il valore di β è funzione solamente del raggio R del cilindro, dello spessore h_s e dal materiale di cui è costituita la membrana (cioè da E e ν). L'espressione di β così determinata è ampiamente utilizzata in letteratura per descrivere la dinamica delle arterie ed il relativo modello di struttura è detto *independent rings model* (si veda [22, 21]).

Il modello descritto da (1.3) e (1.4) può essere quindi visto, alla luce di quanto appena ricavato, come una generalizzazione dell'*independent rings model* per una geometria arbitraria.

1.2 Modellazione del fluido

Si consideri un fluido Newtoniano incomprimibile in movimento, al tempo t , nel dominio deformabile $\Omega^t \in \mathbb{R}^3$ rappresentato in Figura 1.3. L'evoluzione di Ω^t non è conosciuta *a priori*, ma può essere determinata attraverso lo studio dell'interazione tra il fluido e la struttura.

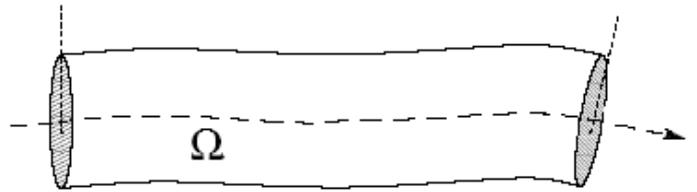


Figura 1.3: Il dominio Ω_t per il fluido

Il problema, dal punto di vista matematico, è estremamente complesso e consiste nel determinare la velocità e la pressione del fluido, lo spostamento della struttura e la posizione dei punti del dominio Ω^t ad ogni istante t . In seguito si prenderà in considerazione una geometria come quella rappresentata in Figura 1.4, dove il solido occupa la porzione Γ^t mentre Γ_{in}^t e Γ_{out}^t rappresentano rispettivamente le sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

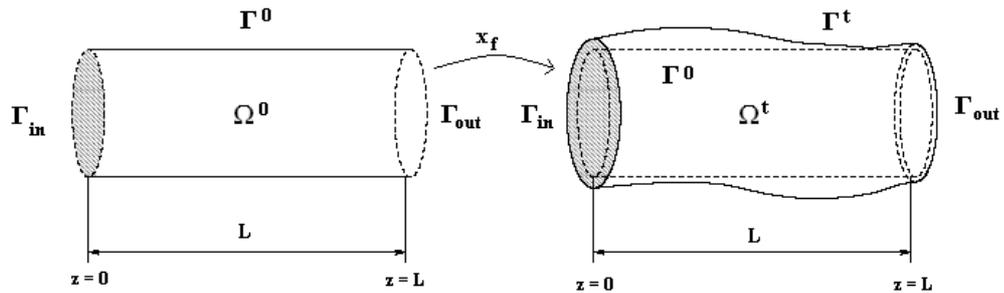


Figura 1.4: Il dominio di riferimento (a sinistra) ed il dominio corrente (a destra)

Per determinare l'evoluzione del fluido si considerino le equazioni di Navier-Stokes scritte in coordinate ALE (si veda [12, 3, 7, 6, 22]) per un fluido omogeneo, incomprimibile e Newtoniano. Si introducano un dominio di riferimento iniziale Ω^0 e una mappa regolare \mathbf{x}_f che trasforma Ω^0 nell'attuale configurazione Ω^t al tempo t . Le equazioni di Navier-Stokes assumono la forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} + \rho_f ((\mathbf{u} - \mathbf{w})) \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \sigma_f(\mathbf{u}, p) = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega^t \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega^t \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega^t \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_D^t} = \mathbf{g} & \text{in } (0, T) \\ (\sigma_f \mathbf{n}_3)|_{\Gamma_N^t} = \mathbf{h} & \text{in } (0, T) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

dove $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ è la velocità del fluido, $p = p(t, \mathbf{x})$ la pressione, \mathbf{n}_3 il versore normale a $\partial\Omega^t$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ e \mathbf{u}_0 sono funzioni date, ρ_f è la densità e

$$\sigma_f(\mathbf{u}, p) = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - pI$$

è il tensore di sforzo di Cauchy e μ è la viscosità dinamica. Si sono indicate con Γ_D^t e Γ_N^t le sezioni di ingresso o di uscita Γ_i^t dove vengono imposte le condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann rispettivamente. In più si è indicato con $\frac{D^A}{Dt}$ la derivata temporale nelle coordinate ALE e con \mathbf{w} la velocità dei punti del dominio del fluido nella configurazione corrente, mentre $\tilde{\mathbf{w}}$ rappresenta la stessa quantità espressa rispetto alle coordinate di riferimento $\mathbf{x}^0 \in \Omega^0$: $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} \circ \mathbf{x}_f$. Questa quantità può esser calcolata assumendo che

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{w}|_{\Gamma^t} = \mathbf{u}|_{\Gamma^t} & \text{in } (0, T), \\ (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3)|_{\Gamma_D^0 \cup \Gamma_N^0} = 0 & \text{in } (0, T), \\ \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \tilde{\mathbf{n}}_3} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_\alpha \right) \Big|_{\Gamma_D^0 \cup \Gamma_N^0} = 0, \quad \alpha = 1, 2 & \text{in } (0, T), \end{array} \right. \quad (1.7)$$

dove $\tilde{\mathbf{n}}_\alpha$ sono i versori tangenti a $\partial\Omega^0$. In seguito si porrà $\tilde{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_i \circ \mathbf{x}_f^{-1}$.

Un metodo largamente utilizzato per calcolare la velocità $\tilde{\mathbf{w}}$ in tutto il dominio Ω^0 è quello di considerare la seguente estensione armonica (si veda [20, 17]):

$$-\Delta \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega^0, \quad (1.8)$$

con le condizioni al contorno (1.7).

Una volta nota la velocità dei punti del dominio, è possibile definire la mappa in coordinate ALE

$$\mathbf{x}_f(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t \tilde{\mathbf{w}}(\tau, \mathbf{x}^0) d\tau.$$

Tale mappa permette di determinare la posizione dei punti $\mathbf{x}^0 \in \Omega^0$ nella configurazione corrente Ω^t .

1.3 Il problema accoppiato fluido-struttura

E' possibile osservare che il problema (1.6) è incompleto, in quanto non viene imposta nessuna condizione sull'interfaccia con la struttura Γ^t . Tale condizione è determinata dall'accoppiamento tra il fluido e il modello di struttura (1.3). L'accoppiamento dei due modelli consiste nell'imporre la continuità della velocità e dello sforzo normale su Γ^t , ottenendo le condizioni di interfaccia seguenti

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{\Gamma^t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^t}, \\ (f_s \delta)|_{\Gamma^t} = -((\sigma_f \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^t}. \end{cases} \quad (1.9)$$

dove δ esprime la variazione di area nel passaggio dalla configurazione di riferimento Γ^0 a quella deformata Γ^t . Per esempio, in un dominio cilindrico

$$\delta = \left(\frac{R_0 + \eta_3}{R_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_0 + \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \theta} \right)^2} \right)^{-1},$$

dove R_0 è il raggio nella configurazione di riferimento e θ la coordinata angolare. Al fine di descrivere le condizioni al contorno più adatte per il fluido all'interfaccia con la struttura nella direzione tangenziale, si imponga

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\alpha)|_{\Gamma^t} = 0. \quad (1.10)$$

Tale condizione è consistente con la scelta fatta di trascurare il movimento tangenziale della struttura.

Per poter scrivere la formulazione debole del problema relativo all'accoppiamento fluido-struttura è necessario introdurre i seguenti spazi funzionali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}^t = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega^t) : \mathbf{v}|_{\Gamma_D^t} = 0 \text{ e } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\alpha)|_{\Gamma^t} = 0\}, \\ \mathbf{V}_g^t = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega^t) : \mathbf{v}|_{\Gamma_D^t} = \mathbf{g} \text{ e } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\alpha)|_{\Gamma^t} = 0\}, \\ Q^t = L^2(\Omega^t), \\ \mathbf{M}^0 = \{\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega^0) : \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma^0} = 0 \text{ e } (\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma_D^0 \cup \Gamma_N^0} = 0\}, \\ W^0 = H^1(\Gamma^0). \end{array} \right.$$

Si introduca anche la seguente forma bilineare

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T, \nabla \mathbf{v}),$$

dove si è indicato con (\cdot, \cdot) il prodotto interno nello spazio funzionale $\mathbf{L}^2(\Omega^t)$. E' possibile ora introdurre la seguente formulazione debole per il problema fluido (1.6), con la condizione (1.10): trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_g^t$ e $p \in Q^t$, tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho_f((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \quad = \int_{\Gamma^t} (\sigma_f \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3) d\gamma + \int_{\Gamma_N^t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} d\gamma \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^t$ e $q \in Q^t$. Si osserva che a questo livello non è stata ancora imposta la condizione al bordo di Dirichlet (1.9)₁ su Γ^t . Analogamente, per il

problema relativo alla struttura (1.3) si ottiene, per ogni tempo t , la seguente formulazione debole: trovare $\tilde{\eta} \in W^0$, tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s h_s \left(\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2}, \tilde{\chi} \right)_{\Gamma^0} + (\beta \tilde{\eta}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} = (\tilde{f}_s, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} \\ \tilde{\eta}|_{t=0} = \eta_0 \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta_v \end{array} \right. \quad (1.12)$$

per ogni $\tilde{\chi} \in W^0$, avendo indicato con $(\cdot, \cdot)_{\Gamma^0}$ il prodotto interno nello spazio funzionale $L^2(\Gamma^0)$.

E' possibile ora introdurre una formulazione debole del problema accoppiato fluido-struttura. Ponendo

$$\mathbf{S}^t = \{(\mathbf{v}, \tilde{\chi}) \in \mathbf{V}^t \times W^0 : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^t} = \chi|_{\Gamma^t}\} \quad (1.13)$$

dove, se $\tilde{\chi} \in W^0$, allora $\chi = \tilde{\chi} \circ x_f$, e assumendo che l'unica forza esterna per la struttura sia data dallo sforzo esercitato dal fluido, è possibile partendo dalle relazioni (1.9), (1.11) e (1.12) ottenere la seguente formulazione debole globale:

Problema 1. *Dati $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma_D^t)$ e $\mathbf{h} \in L^2(\Gamma_N^t)$, trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_g^t$, $p \in Q^t$ e $\eta \in W^0$ tale che, per ogni t ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho_f (((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \quad + \rho_s h_s \left(\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2}, \tilde{\chi} \right)_{\Gamma^0} + (\beta \tilde{\eta}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} = \int_{\Gamma_N^t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} d\gamma, \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{\Gamma^t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^t}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^0}, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0, \end{array} \right. \quad (1.14)$$

per ogni $(\mathbf{v}, \tilde{\chi}) \in \mathbf{S}^t$ e $q \in Q^t$.

Si osserva che, grazie alla condizione di accoppiamento $(1.9)_2$ e alla particolare scelta delle funzioni test per il problema fluido-struttura, i due termini

$$\int_{\Gamma^t} (\sigma_f \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_3 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3) d\gamma \quad \text{e} \quad (\tilde{f}_s, \tilde{\chi})_{\Gamma^0},$$

si cancellano e quindi la condizione $(1.9)_2$ nella formulazione (1.14) è trattata implicitamente.

1.4 Lo schema di Robin

La formulazione debole globale (1.14) può essere discretizzata in spazio attraverso la tecnica degli elementi finiti, seguendo ad esempio [19]. Dal momento che il costo computazionale e la complessità del problema fluido-struttura sono molto elevati, è assai comune l'utilizzo di codici che risolvano separatamente i due sottoproblemi fluido e struttura, sfruttando il fatto che spesso tali codici sono già disponibili.

Gli algoritmi maggiormente diffusi sono di tipo esplicito: essi risolvono il problema fluido e il modello di struttura solo una volta ad ogni passo temporale, ma non soddisfano esattamente le condizioni di interfaccia (1.9). Di conseguenza i due sottoproblemi non risultano essere accoppiati in modo esatto e ciò può provocare l'instabilità dello schema numerico.

In alternativa è possibile utilizzare schemi impliciti in tempo sia per i termini relativi al fluido, sia per quelli relativi alla struttura nel problema (1.14): tali schemi portano ad un sistema accoppiato monolitico di equazioni fortemente non lineari: il problema è risolvibile sottoiterando ad ogni passo temporale fino alla convergenza della soluzione dei due sottoproblemi. In questo caso, le condizioni di accoppiamento sono trattate implicitamente, rendendo l'algoritmo stabile, ma il costo computazionale complessivo risulta essere piuttosto elevato (si veda [2, 4, 10, 15, 1, 16]).

Una terza strategia (si veda [20] per un approfondimento), che adottiamo in questo contesto, consiste nel trattare esplicitamente il dominio del fluido, estrapolando in modo opportuno le informazioni relative ai tempi precedenti,

e nel trattare in modo implicito le condizioni di accoppiamento (1.9). Grazie al semplice modello di struttura (1.3), inoltre, è possibile derivare una formulazione del problema accoppiato in cui l'equazione della struttura viene inclusa nel problema fluido come *condizione al bordo di Robin*. Il problema fluido-struttura che si ricava rimane non lineare, dal momento che la posizione dell'interfaccia risulta incognita. Per poter risolvere questa non linearità esistono due possibili strategie: la prima consiste nel trattare in modo esplicito la posizione dell'interfaccia tramite estrapolazione dai passi temporali precedenti. Questo metodo, che non richiede alcuna sottoiterazione, viene chiamato *schema di Robin esplicito*. Una seconda strategia, che prende il nome di *schema di Robin implicito*, consiste viceversa nel trattare implicitamente la posizione dell'interfaccia tramite sottoiterazioni di punto fisso. In entrambi i casi, la risoluzione del problema (1.14) si riduce alla risoluzione di un problema fluido in coordinate ALE con una condizione di Robin al bordo appropriata, come illustrato di seguito.

Si consideri una discretizzazione temporale per la formulazione debole (1.14). Si ponga $t^n = n\Delta t$, dove con Δt è indicato il passo temporale, e, data una quantità f , si indichi con f^n l'approssimazione di $f(t^n)$. Si consideri lo schema di Eulero Implicito per l'equazione relativa al problema fluido; il termine convettivo viene trattato tramite un'approssimazione semi-implicita, mentre l'equazione relativa alla struttura con uno schema del primo ordine implicito, in particolare

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} + \beta \eta^{n+1} = f_s^{n+1}.$$

Il movimento del dominio del fluido, inoltre, viene considerato in modo esplicito, cioè le equazioni al tempo t^{n+1} vengono risolte in Ω^n , utilizzando un'approssimazione del primo ordine. Si ottiene la seguente discretizzazione temporale del problema (1.14):

Problema 2. Trovare $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V}_g^n$, $p^{n+1} \in Q^n$ e $\eta^{n+1} \in W^0$ tale che, per ogni n ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_f}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n + a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n + ((\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n \\ \quad - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v})_n + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} (\tilde{\eta}^{n+1}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} + (\beta \tilde{\eta}^{n+1}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} = \\ \quad = \frac{\rho_f}{\Delta t}(\mathbf{u}^n, \mathbf{v})_n + \int_{\Gamma_N^n} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} (2\tilde{\eta}^n - \tilde{\eta}^{n-1}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0}, \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})_n = 0, \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \eta^0}{\partial t} = (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^0}, \quad \eta^0 = \eta_0, \end{array} \right. \quad (1.15)$$

per tutti $(\mathbf{v}, \tilde{\chi}) \in \mathbf{S}^n$ e $q \in Q^n$ e dove si è posto $a(\mathbf{w}, \mathbf{v})_n = \mu \int_{\Omega^n} (\nabla \mathbf{w}^n + (\nabla \mathbf{w}^n)^T, \nabla \mathbf{v}) \, d\omega$ e $(\mathbf{w}, \mathbf{v})_n$ il prodotto interno nello spazio funzionale $L^2(\Omega^n)$.

La discretizzazione in tempo della derivata seconda che compare all'interno del problema relativo alla posizione della struttura dovrebbe essere opportunamente scritta in modo tale che al primo passo temporale si tenga conto della condizione iniziale. Si introduca infine una discretizzazione temporale implicita per la condizione di interfaccia (1.9)₁ tra fluido e struttura:

$$\frac{(\eta^{n+1} - \eta^n)}{\Delta t} \Big|_{\Gamma^n} = (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^n}. \quad (1.16)$$

Si consideri ora il modello algebrico inerziale relativo alla struttura. Al fine di semplificare la trattazione, si pone $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. In più adottiamo la seguente notazione: $\sigma_3 = (\sigma_f \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n}_3$ e $z_3 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}_3$, dove \mathbf{z} è una funzione data.

In questo lavoro viene considerato unicamente lo schema di Robin esplicito per il trattamento della posizione dell'interfaccia, in quanto il trattamento implicito, nonostante il costo computazionale più elevato, non sembra fornire una soluzione significativamente più accurata (si veda [20]). Grazie alla discretizzazione della condizione di interfaccia (1.16), dalla (1.15) e dalla scelta delle funzioni test esposte in (1.13), otteniamo la seguente formulazione debole:

$$\begin{aligned}
& \rho_f \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \mathbf{v} \right)_n + a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n + ((\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{w}}^n) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n \\
& - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v})_n + \int_{\Gamma^n} \left(\frac{\rho_s h_s}{\Delta t} + \beta \Delta t \right) u_3^{n+1} v_3 \delta^n d\gamma = \\
& - \int_{\Gamma^n} \left(\left(-\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \right) \eta^n + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} \eta^{n-1} \right) v_3 \delta^n d\gamma.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Si osservi che, grazie alla relazione (1.16), non è necessario risolvere l'equazione legata alla struttura ogni volta, perchè essa è già parte del problema relativo al fluido. Quest'ultimo presenta ora una condizione al contorno di Robin per la componente normale della velocità nella configurazione Γ^n , definita da:

$$\left(\sigma_3^{n+1} + \delta^n \left(\frac{\rho_s h_s}{\Delta t} \right) u_3^{n+1} \right) \Big|_{\Gamma^n} = - \left(\left(-\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \right) \eta^n + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} \eta^{n-1} \right) \delta^n. \tag{1.18}$$

Questa condizione permette di accoppiare i due problemi, fluido e struttura, in maniera tale da avere la condizione di interfaccia (1.9) trattata implicitamente ed allo stesso tempo dover risolvere un solo problema, quello fluido, senza sottoiterare. Considerando quindi il movimento del fluido esplicitamente, la formulazione del problema fluido-struttura appena introdotta permette di risolvere ad ogni passo temporale un solo problema relativo al fluido ed una estensione armonica.

Per la discretizzazione spaziale del problema (1.17) e dell'estensione armonica (1.8) e (1.7), si introducano i sottospazi di dimensione finita e inf-sup compatibili $\mathbf{V}_h^n \subset \mathbf{V}^n$ e $Q_h^n \subset Q^n$ ed i sottospazi di dimensione finita $\mathbf{V}_{\mathbf{g},h}^n \subset \mathbf{V}_{\mathbf{g}}^n$ e $M_h^0 \subset M^0$, ottenendo il problema seguente:

Problema 3. Trovare $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathbf{V}_{g,h}^n$, $p_h^{n+1} \in Q_h^n$ e $\tilde{\eta}_h^{n+1} \in W_h^0$ tali che, per ogni n ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_f}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_n + a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_n + (((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{w}_h^n) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_n \\ \quad + \int_{\Gamma^n} \left(\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \Delta t \right) u_{3,h}^{n+1} v_{3,h} \delta^n d\gamma - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_n \\ \quad = \frac{\rho_f}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h)_n + \int_{\Gamma_N^n} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h d\gamma \\ \quad - \int_{\Gamma^n} \left(\left(-\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \right) \eta_h^n + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} \eta_h^{n-1} \right) v_{3,h} \delta^n d\gamma \\ (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1})_n = 0, \end{array} \right. \quad (1.19)$$

e tali che

$$\eta_h^{n+1} = \Delta t u_{3,h}^{n+1} + \eta_h^n$$

per tutti $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^n$ e $q_h \in Q_h^n$.

Si ricava inoltre la seguente formulazione per il problema (1.8) e (1.7): trovare $\mathbf{w}_h^{n+1} \in \mathbf{M}_h^0$ tale che, per ogni n ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \mathbf{w}_h^{n+1}, \nabla \psi_h)_0 = 0 \\ \mathbf{w}_h^{n+1}|_{\Gamma^0} = \mathbf{u}_h^{n+1}|_{\Gamma^0} \end{array} \right.$$

per ogni $\psi \in \mathbf{M}_h^0$.

1.5 Le condizioni al bordo

In numerosi problemi di fluidodinamica, come quello da noi trattato, il bordo, o parte di esso, che individua il dominio computazionale non corrisponde ad un bordo fisico realmente esistente, ma viene introdotto per individuare la regione di interesse. L'introduzione di tali bordi artificiali è in genere fonte di inaccuratezza nel momento in cui si vanno a prescrivere le condizioni al bordo: spesso infatti i dati a disposizione al bordo non sono sufficienti per formulare un problema matematicamente ben posto.

E' noto che, anche se il moto del fluido è descritto da equazioni paraboliche, la natura del problema di interazione fluido-struttura nell'ambito dell'emodinamica presenta caratteristiche riconducibili ad un problema iperbolico; in particolare, le onde di pressione attraversano il dominio del fluido. L'imposizione di una condizione adatta sulle sezioni di ingresso e di uscita del fluido che non generi riflessioni spurie è l'obiettivo principale in questo tipo di problemi.

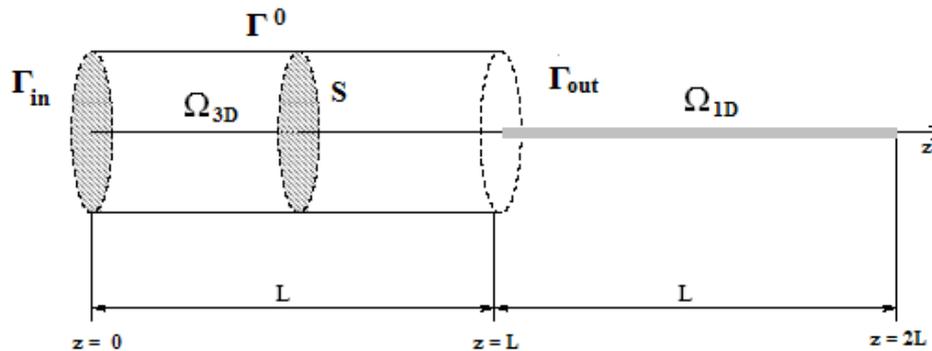


Figura 1.5: Accoppiamento 3D/1D

Allo scopo di risolvere il fenomeno legato alle riflessioni spurie, è possibile imporre al bordo una *condizione assorbente* ottenibile dall'accoppiamento del modello 3D con un modello ridotto 1D, come proposto in [5]. In particolare, riferendoci ad un cilindro elastico come mostrato in Figura 1.5, dove L è la lunghezza, un modello semplificato 1D può essere ottenuto integrando per ogni tempo t le equazioni di Navier-Stokes lungo ogni sezione S normale all'asse z del cilindro. Il modello 1D, per ogni $t > 0$ e $0 < z < L$, assume la forma seguente (si veda [5, 8, 9]):

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q}{A} \right) + \frac{A}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

dove Q è il flusso che attraversa la sezione S , A è l'area di S , P è la pressione media su S , K_R è un parametro che tiene conto della viscosità del fluido, mentre α dipende dalla forma del profilo di velocità del fluido sulla sezione S . Per esempio, la scelta di $\alpha = 1$ corrisponderebbe ad un profilo piatto di velocità. Il sistema (1.20) è costituito da due equazioni in tre incognite (P, Q, A). La chiusura del sistema è effettuabile solamente introducendo una terza equazione che descriva la pressione media P in funzione dell'area A al tempo t e di quella al tempo zero A^0 . Considerando il modello algebrico relativo alla struttura dato dall'equazione (1.3) con $\rho_s = 0$, si ottiene

$$P = \frac{\beta}{\pi} (\sqrt{A} - \sqrt{A^0}) \quad (1.21)$$

dove A^0 è l'area della superficie S al tempo $t = 0$, il parametro β è dato dalla relazione (1.5) e lo sforzo normale viene approssimato con la pressione. Il sistema (1.20) risulta essere un sistema iperbolico chiuso in grado di metter in luce il fenomeno di propagazione delle onde di pressione lungo la direzione dell'asse del cilindro. Il sistema ha due autovalori ed i corrispondenti autovettori sono le variabili caratteristiche del problema, date da (si veda [19, 5])

$$W_{1,2} = \frac{Q}{A} \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_f}} \left(\sqrt{P + \beta\sqrt{A_0}} - \sqrt{\beta\sqrt{A_0}} \right). \quad (1.22)$$

Nel seguito si propone la derivazione di una condizione al bordo assorbente per le sezioni di ingresso e di uscita del fluido che non richiede l'accoppiamento del modello 3D con il modello 1D, come proposto in [20]: questa può essere ottenuta semplicemente imponendo che la caratteristica entrante nel dominio 3D sia nulla, il che equivale ad imporre che nessuna informazione entri nel dominio. Si osservi che se non venisse considerato l'accoppiamento del modello 3D con quello 1D, non si avrebbe nessun fattore di assorbimento e si creerebbero riflessioni all'interno del dominio fluido. In particolare, per la sezione di uscita, imponendo

$$W_2|_{\Gamma_{out}^t} = \frac{Q}{A} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_f}} \left(\sqrt{P + \beta\sqrt{A_0}} - \sqrt{\beta\sqrt{A_0}} \right) \Big|_{\Gamma_{out}^t} = 0, \quad (1.23)$$

si ottiene

$$P|_{\Gamma_{out}^t} = \left(\left(\frac{\sqrt{\rho_f}}{2\sqrt{2}} \frac{Q}{A} + \sqrt{\beta\sqrt{A_0}} \right)^2 - \beta\sqrt{A_0} \right) \Big|_{\Gamma_{out}^t} \quad (1.24)$$

La relazione (1.24) lega la pressione media P al flusso Q in corrispondenza della sezione di uscita Γ_{out} . Trattando in maniera esplicita il flusso Q e interpretando la pressione media espressa nella relazione (1.24) come uno sforzo normale costante nello spazio, come suggerito in [11], si perviene alla seguente *condizione al bordo assorbente di Neumann* (si veda [20]):

$$(\sigma_f^{n+1} \mathbf{n}_3)|_{\Gamma_{out}^n} = \left(\left(\left(\frac{\sqrt{\rho_f}}{2\sqrt{2}} \frac{Q^n}{A^n} + \sqrt{\beta\sqrt{A^0}} \right)^2 - \beta\sqrt{A^0} \right) \mathbf{n}_3 \right) \Big|_{\Gamma_{out}^n}. \quad (1.25)$$

Osserviamo che per una geometria simile a quella rappresentata nella figura 1.3, è possibile applicare alla sezione di uscita la condizione al bordo (1.25) estendendo idealmente il cilindro in modo da renderlo di lunghezza infinita e limitando le riflessioni spurie. Una condizione al bordo assorbente analoga può essere ricavata anche per la sezione di ingresso del fluido Γ_{in} seguendo il medesimo procedimento.

Capitolo 2

Un modello per arteria con protesi e tapering

2.1 Possibili applicazioni del modello

E' noto che le patologie che colpiscono il sistema cardiovascolare sono numerose e molto diffuse nella popolazione. La modellazione fluido-struttura risulta particolarmente utile ed efficace nello studio degli effetti di tali patologie sulla circolazione sanguigna: la propagazione delle onde di pressione è infatti dovuta all'interazione tra la massa fluida e la parete deformabile del vaso sanguigno, dunque le proprietà elastiche di quest'ultimo sono determinanti in tale processo. L'aumento di rigidità o la presenza di un restringimento locali in un'arteria hanno una notevole influenza sul flusso sanguigno e sulla propagazione delle onde di pressione.

Con l'età sia lo spessore delle grandi arterie sia il loro diametro va crescendo, anche se, come osservato sperimentalmente, il loro rapporto si mantiene costante. L'aumento di spessore è un processo naturale dovuto all'ispessimento delle lamelle elastiche che costituiscono la parete delle arterie che si completa in età adulta. Tale processo tende però successivamente a degenerare: gli elementi elastici tendono a calcificarsi e l'arteria diventa meno dilatabile. Tale fenomeno di indurimento delle arterie, pur manifestandosi inevitabilmente con l'età, può presentare intensità diverse. Ad esso è collegato un processo molto diffuso nei paesi più sviluppati, l'*arteriosclerosi*: questa patologia causa la restrizione del lume dell'arteria, detta stenosi, che ostruisce parzialmente o totalmente il flusso di sangue. Il problema più grave legato a questo tipo di malfunzionamento consiste nell'impossibilità del sangue di raggiungere i tessuti

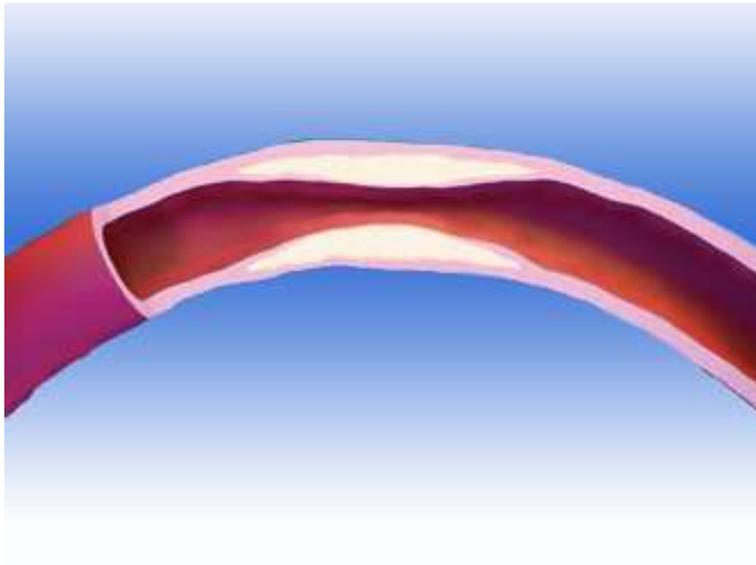


Figura 2.1: Arteria con stenosi

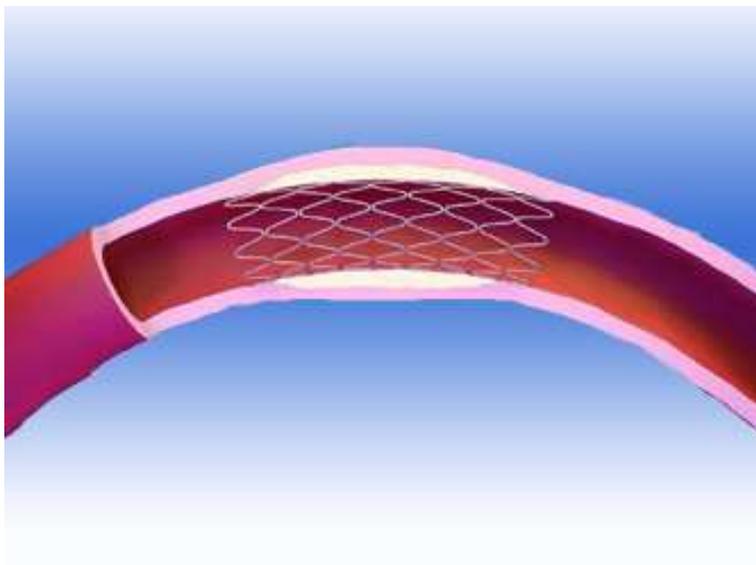


Figura 2.2: Arteria con stent

a valle, che di conseguenza possono diventare ischemici. Nella zona ischemica, a causa della privazione di sangue, si possono produrre lesioni ai tessuti, la cui gravità dipende dalla durata e dall'estensione dell'ischemia.

Una seconda patologia che provoca una alterazione del corretto funzionamento dell'apparato circolatorio è l'*aneurisma*, un allargamento dell'arteria causato dal cedimento progressivo della parete vascolare. La parete arteriosa può quindi rompersi provocando un'emorragia interna o comunque non essere più in grado di trasportare il sangue a valle. L'aneurisma causa anche anomale condizioni fluidodinamiche che possono condurre alla trombosi della zona dilatata dell'arteria.



Figura 2.3: Protesi vascolari (Dacron)

Sia nel caso di stenosi, sia nel caso di aneurisma, per ripristinare l'efficacia di un tratto vascolare malfunzionante, si interviene chirurgicamente con l'impianto di uno *stent* o di una *protesi vascolare*. Questi, sebbene siano in grado di garantire il corretto trasporto del sangue, causano una alterazione dei parametri fluidodinamici che governano il meccanismo di interazione tra fluido ematico e parete vascolare. Gli stents sono oggetti metallici espandibili che vengono inseriti in modo permanente in un'arteria con stenosi per ripristinare la sezione originale del lume. Per quanto l'impianto di uno stent sia una tecnica poco invasiva, la presenza di tale rete metallica causa una brusca variazione delle proprietà elastiche della parete dell'arteria. La sovrapposizione delle onde riflesse dallo stent con quelle prodotte dal cuore può generare anomali picchi di pressione.

Nel caso di una protesi vascolare il problema fondamentale è la *compliance*, cioè la misura di distensibilità: le protesi non sono in grado di simulare

perfettamente il comportamento meccanico dei vasi ematici naturali. Da diversi anni si cerca di sviluppare materiali artificiali e forme che riproducano la compliance dell'arteria da sostituire, ma le problematiche a riguardo sono numerose, ad esempio, oltre all'elasticità, la stabilità, la porosità e la biocompatibilità: il problema dunque è ancora aperto. La differenza di compliance tra vasi naturali e protesi artificiali è un parametro fondamentale per il successo di un impianto vascolare. I disturbi che si possono verificare quando viene utilizzata una protesi con compliance minore, cioè più rigida, possono essere diverse. Innanzitutto si generano reflussi di sangue che potrebbero portare alla formazione di aneurismi, alla lacerazione della parete dell'arteria o all'occlusione del vaso. In secondo luogo le deformazioni della protesi e del vaso naturale possono essere tra loro molto differenti: le tensioni in gioco potrebbero comportare l'apertura delle suture esistenti tra i due tratti di vaso.

Come è possibile osservare, sono numerose le applicazioni di un modello matematico e numerico che sia in grado di considerare gli effetti di una variazione di elasticità della parete dell'arteria. Tale modello può essere ottenuto dal modello fluido-struttura tridimensionale descritto in precedenza.

2.2 Il modello matematico per la protesi

Si vuole ora ricavare un modello che simuli la presenza di una protesi vascolare in una arteria. In questo contesto vengono trascurati gli effetti del restringimento locale dovuto alla presenza di coaguli e ci si limita a considerare i fenomeni che insorgono in seguito alla variazione di elasticità in un tratto di parete vascolare. Questa semplificazione è assolutamente realistica nel caso di protesi vascolare, ed è sufficientemente corretta anche nel caso in cui si voglia simulare la presenza di una stenosi se si suppone che la patologia non sia avanzata e che lo spessore del coagulo sia molto minore del diametro dell'arteria.

Si consideri il modello algebrico-inerziale per la struttura, già introdotto nei capitoli precedenti:

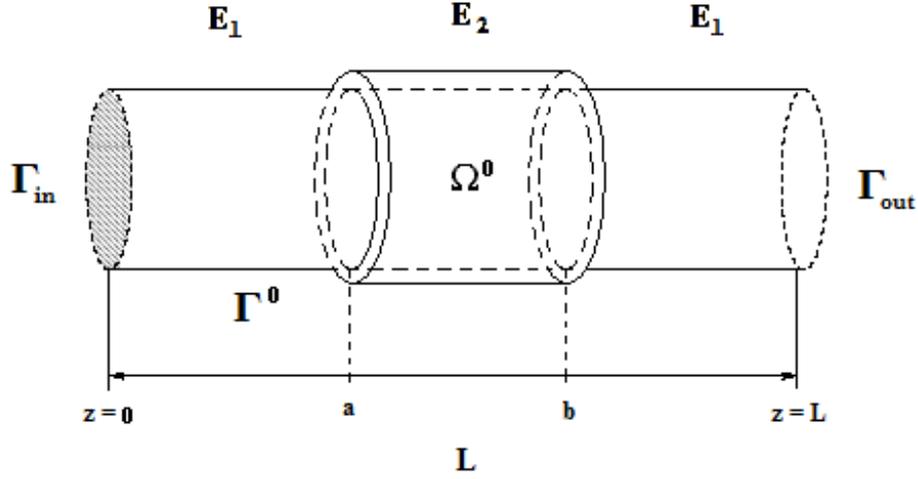


Figura 2.4: Modello di arteria con protesi vascolare

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s h_s \frac{\partial \eta}{\partial t} + \beta \eta = f_s & \text{in } (0, T) \times \Gamma^0, \\ \eta|_{t=0} = \eta_0 & \text{in } \Gamma^0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_v & \text{in } \Gamma^0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

dove il coefficiente β nel caso attuale di geometria cilindrica assume la forma seguente:

$$\beta = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2} \quad \text{in } [0, L]$$

Nel caso precedentemente trattato il coefficiente β risultava costante lungo l'asse del cilindro. Per poter modellare la presenza di una protesi o di una stenosi, è necessario supporre che il modulo di Young sia funzione della coordinata assiale, cioè $E = E(z)$ con $z \in [0, L]$, in modo da descrivere la variazione delle proprietà elastiche della parete. Conseguentemente anche il

coefficiente β nell'equazione per la struttura non sarà più costante ma funzione della variabile z , cioè

$$\beta(z) = \frac{h_s}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2} E(z) \quad \text{in } [0, L]$$

Si osservi che, a causa del tipo di fenomeno che si vuole descrivere, cioè la presenza di una stenosi o di una protesi, tale funzione è discontinua ed ha in generale la forma seguente:

$$\beta(z) = \begin{cases} \beta_1(z) = \frac{h_s}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2} E_1 & \text{in } [0, a) \cup (b, L] \\ \beta_2(z) = \frac{h_s}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2} E_2 & \text{in } [a, b] \end{cases} \quad (2.2)$$

A causa appunto di questa discontinuità nel coefficiente β ci si aspetta dalla simulazione numerica che l'andamento di pressione nell'arteria presenti delle riflessioni che andranno a sovrapporsi all'onda di pressione generata dal cuore.

Si riportano in Tabella 2.1 alcuni valori significativi di grandezze meccaniche relative ai materiali più comuni utilizzati per la fabbricazione di protesi vascolari. Generalmente si tratta di polimeri sintetici: tra quelli citati sicuramente il più comune è il *Dacron*, non solo per le ottime proprietà meccaniche. Questo polimero, infatti, risulta essere facilmente suturabile e consente una progressiva crescita dell'endotelio, il tessuto che riveste l'interno dei vasi sanguigni, sulla sua superficie, rendendo la protesi altamente emocompatibile.

Materiale	Modulo di Young
Vaso sanguigno (medio calibro)	0.48 MPa
PoliTetraFluorEtilene (PTFE)	0.41 ÷ 0.55 GPa
PoliEtere (PET)	2.8 ÷ 4.1 GPa
PoliEtilenTerEftalato (Dacron)	~ 3.0 GPa

Tabella 2.1: Proprietà meccaniche dei materiali per protesi vascolari

Naturalmente ci si aspetta che l'ampiezza delle sovrappressioni dovute alla variazione di elasticità siano proporzionali alla differenza esistente tra i moduli di Young nei due tratti di arteria. Questo modello ci permette di verificare se, note le proprietà meccaniche di una determinata protesi, le pressioni che si generano nell'arteria siano incompatibili o meno con il corretto funzionamento del sistema cardiocircolatorio.

2.3 Modello di arteria con tapering

Si vuole ora ricavare un modello che simuli gli effetti del tapering, cioè il naturale restringimento del lume dell'arteria quando ci si muove dal cuore verso i vasi periferici, come mostrato in Figura 2.5.

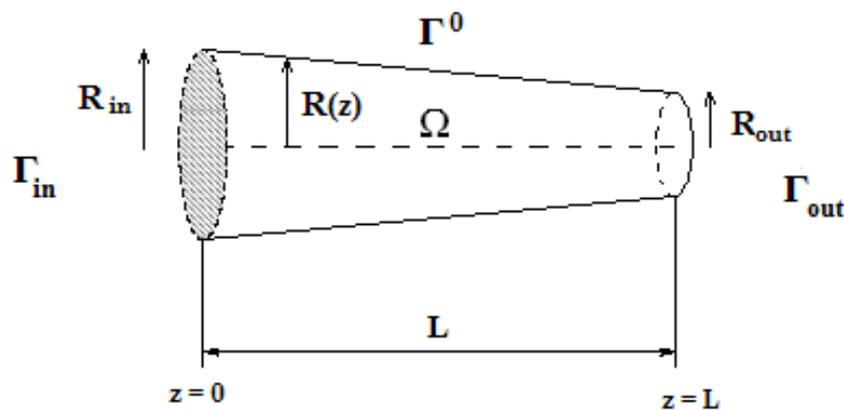


Figura 2.5: Modello di arteria con tapering

Si consideri ora il modello algebrico-inerziale (2.1) per la struttura e la forma che assume il coefficiente β nel caso di geometria cilindrica:

$$\beta = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2} \quad \text{in } [0, L].$$

E' possibile osservare che, essendo il raggio della struttura variabile rispetto

alla coordinata assiale z , cioè $R = R(z)$, anche il coefficiente β non è più costante, ma diventa una funzione continua di z , cioè

$$\beta(z) = \frac{h_s E}{1 - \nu^2} \frac{1}{R^2(z)} \quad \text{in } [0, L].$$

Si andranno a valutare con opportune simulazioni gli effetti del tapering sull'andamento della pressione nel vaso sanguigno.

Capitolo 3

L'accoppiamento 3D/0D

3.1 La necessità di un modello multiscala

Una delle maggiori difficoltà che si incontrano nella formulazione di un problema matematico ben posto a partire dal modello di arteria che è stato introdotto è quella di prescrivere in modo corretto le condizioni al bordo. Per poter individuare un dominio nel quale risolvere il problema fluido-struttura sono state introdotte due pareti di contorno artificiali: queste costituiscono un'interfaccia tra la porzione di arteria studiata e la rimanente parte del sistema cardiocircolatorio. Su tali interfacce, dunque, è necessario imporre delle condizioni al bordo. La scelta di tali condizioni al contorno non può essere casuale, ma deve essere mirata a rispettare alcune caratteristiche fisiologiche dell'apparato cardiovascolare. Nella Sezione 1.5 sono state introdotte delle condizioni assorbenti: esse risultano essere particolarmente efficaci nel rimuovere le riflessioni spurie di onde di pressione. Tuttavia sono basate su un'ipotesi d'arteria "infinitamente lunga". In questo Capitolo adottiamo un punto di vista diverso e più vicino alla realtà, in cui le condizioni al contorno sono fornite da un modello semplificato del sistema cardiocircolatorio.

Il sistema circolatorio umano è un circuito chiuso il cui compito è garantire che il sangue raggiunga tutti i tessuti dell'organismo. Il flusso ematico è determinato da un complesso sistema di controllo costituito principalmente dai tessuti stessi e dal sistema nervoso: da ciò deriva una stretta interconnessione tra i diversi distretti del sistema cardiocircolatorio tale da generare meccanismi di compensazione. Si può dunque dedurre che la dinamica del sangue e del tessuto vascolare in una regione limitata come quella da noi trattata sia strettamente dipendente dalla dinamica globale della rete di vasi che costituisce il sistema. Tale legame fa sì che, ad esempio, il malfunzionamento di

una delle valvole cardiache o la diminuzione dell'elasticità di parte del tessuto vascolare dovuta a varie patologie causi l'alterazione dei valori di pressione o di altri parametri emodinamici in differenti zone del sistema. Se trascurassimo la dinamica dell'intero sistema cardiocircolatorio, dunque, potremmo perdere preziose informazioni anche a livello locale. La necessità di dover considerare la dinamica globale del sistema con il fine di studiare la dinamica locale ha condotto alla formulazione di nuovi modelli matematici e numerici per la simulazione del sistema cardiocircolatorio basati su una prospettiva *multiscala*. Questo tipo di approccio risulta essere particolarmente accurato e si rivela adatto al nostro caso di studio: una strategia multiscala infatti ci permette di risolvere il problema fluidodinamico sull'intero sistema circolatorio con diversi livelli di dettaglio. Inoltre è stato osservato che la presenza nelle medie-grandi arterie di uno stent o di una protesi vascolare determina alterazioni di flusso e di pressione particolarmente significative non solo nel vaso interessato, ma anche nei distretti confinanti. In un'ottica multiscala è possibile analizzare l'andamento del moto sanguigno in dettaglio con un modello locale per il tratto di vaso patologico e contemporaneamente determinare con un modello globale i valori di pressione e portata nei distretti adiacenti. Naturalmente non sarà possibile descrivere l'intero sistema così dettagliatamente come è stato fatto per il tratto di arteria: ci si accontenterà di ricavare un modello più semplice ma sufficientemente efficace.

Si consideri ora il modello tridimensionale già introdotto che risolve localmente il fluido e la parete vascolare: in una prospettiva multiscala lo si vuole accoppiare ad un modello a *parametri concentrati* che descriva la restante parte del sistema cardiocircolatorio. Si pongono come obiettivi innanzitutto quello di non incrementare eccessivamente il costo computazionale del problema ed inoltre di ottenere un modello sufficientemente accurato per il tipo di indagine che si sta svolgendo. E' possibile osservare come il diverso livello di dettaglio tra il modello tridimensionale ed il modello zerodimensionale comporta una notevole differenza di complessità matematica e numerica tra i due problemi. Il problema fluido-struttura tridimensionale, risolto numericamente con lo schema di Robin presentato in Sezione 1.5, richiede infatti la risoluzione del sistema di equazioni a derivate parziali non lineare di Navier-Stokes, mentre il problema relativo al modello a parametri concentrati richiede la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie nella variabile temporale. A causa delle diverse proprietà matematiche e numeriche dei due problemi è necessario prestare particolare attenzione all'accoppiamento dei due modelli per garantire risultati numerici accurati.

3.2 Il modello a parametri concentrati per il vaso sanguigno

Il modello a parametri concentrati si basa sull'analogia esistente tra circuiti idraulici e circuiti elettrici. Uno dei primi simulatori del sistema cardiovascolare era analogico e basato su un circuito elettrico. Altri modelli per la circolazione derivanti da questa analogia sono il modello di Windkessel ed il successivo modello di Westkessel mostrati in Figura 3.1. Questi semplici modelli forniscono una descrizione dei fenomeni principali legati alla circolazione ad un costo computazionale molto ridotto e possono dunque essere accoppiati con un modello accurato che descriva il comportamento del vaso di nostro interesse.

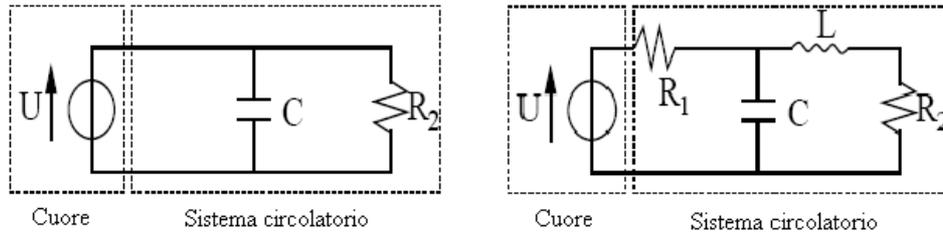


Figura 3.1: I modelli di Windkessel (a sinistra) e di Westkessel (a destra)

Si consideri ora il semplice vaso arterioso cilindrico Ω mostrato in Figura 3.2.

Per poter ricavare il modello a parametri concentrati relativo a tale vaso sanguigno è necessario introdurre alcune ipotesi semplificative sulla base delle quali è possibile passare dallo studio di grandezze fisiche puntuali allo studio di grandezze medie.

1. *Il problema è a simmetria assiale:* tutte le grandezze coinvolte non dipendono dalla coordinata cilindrica angolare θ .
2. *Lo spostamento della parete vascolare è radiale:* $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r$ con $\eta = R - R_0$ è lo spostamento rispetto al raggio iniziale R_0 ; gli spostamenti assiali sono trascurabili.

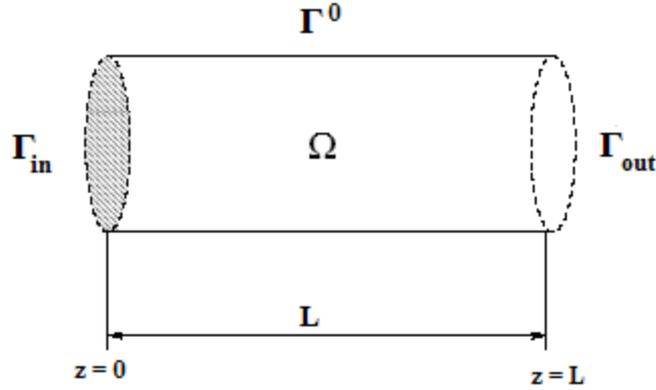


Figura 3.2: Vaso cilindrico Ω

3. *L'asse del cilindro rimane fisso nel tempo.*
4. *La pressione può essere considerata costante nella sezione: la pressione P dipende solo dalla coordinata assiale z e dal tempo t .*
5. *Le forze di volume esterne sono nulle: ad esempio si trascura la gravità.*
6. *La componente trasversale della velocità è trascurabile rispetto a quella assiale: denominando \mathbf{u} la velocità del fluido, si definisce $Q(t, z) := \int_{\Gamma(t,z)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma$ la portata attraverso la sezione $\Gamma(t, z)$ avente come normale \mathbf{n} . Integrando sulla sezione $\Gamma(t, z)$ le equazioni di Navier-Stokes si ottiene il sistema di equazioni 1D, già anticipato nel Capitolo 1, per $z \in (0, l)$ e $t \in (0, T]$:*

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

completate da opportune condizioni iniziali ed al bordo. Il coefficiente di correzione α , la densità ρ ed il parametro di attrito K_R si assume siano costanti. Se si assume che il profilo di velocità sia parabolico risulta che $K_R = 8\pi\mu$, dove μ è la viscosità del sangue.

7. *Lo spostamento della membrana è legato alla pressione da una legge algebrica lineare: risulta che*

$$P - P_{ext} = c (R - R_0) = \beta \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0} \quad (3.2)$$

dove P_{ext} e A_0 sono rispettivamente la pressione e l'area di riferimento e β è il coefficiente relativo al modello di struttura nel caso di geometria cilindrica, come ricavato nella Sezione 1.1.1. Ponendo $\nu = \frac{1}{2}$ si ricava $c = \frac{4hE}{3R_0^2}$.

Se si osserva ora che

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 2\pi \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \approx 2\pi R_0 \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

è possibile assumere, in base alla relazione (3.2), che

$$\frac{\partial A}{\partial t} \approx 2\pi R_0 \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{3\pi R_0^3}{2Eh} \frac{\partial P}{\partial t} = k_1 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.3)$$

dove h è lo spessore ed E il modulo di Young della parete vascolare.

Per ottenere ora una descrizione a parametri concentrati del comportamento del sangue nel cilindro Ω è necessaria una ulteriore integrazione delle equazioni (3.1) lungo la coordinata assiale $z \in (0, l)$. Si definisce dunque la portata media nel cilindro come segue

$$\hat{Q} = \frac{1}{l} \int_V u_z dV = \frac{1}{l} \int_0^l Q dz.$$

Analogamente si definisce la pressione media nel cilindro

$$\hat{P} = \frac{1}{l} \int_0^l P dz, \quad \text{con } P = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma p d\gamma.$$

Integrando ora in $z \in (0, l)$ le equazioni (3.1) e ricordando la (3.3) si ottiene

$$\begin{cases} k_1 l \frac{d\hat{P}}{dt} + Q_2 - Q_1 = 0 \\ l \frac{d\hat{Q}}{dt} + \alpha \left[\frac{Q_2^2}{A_2} - \frac{Q_1^2}{A_1} \right] + \int_0^l \left[\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} \right] dz = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

8. *Il contributo dei termini convettivi è trascurabile:* da ciò deriva che i termini non lineari possono essere trascurati nella (3.4).
9. *La variazione dell'area della sezione lungo l'asse del cilindro è piccola rispetto alla variazione di pressione e flusso:* nella seconda equazione delle (3.4) si può porre dunque che

$$\int_0^l \left[\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} \right] dz \approx \int_0^l \left[\frac{A_0}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A_0} \right] dz.$$

Sulla base di queste assunzioni, le equazioni per il fluido e per la parete si semplificano notevolmente e dopo alcuni passaggi algebrici assumono la forma seguente

$$\begin{cases} \frac{3\pi R_0^3 l}{2Eh} \frac{d\hat{P}}{dt} + Q_2 - Q_1 = 0 \\ \frac{\rho l}{\pi R_0^2} \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{8\mu l}{\pi R_0^4} \hat{Q} + P_2 - P_1 = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

Le equazioni (3.5) rappresentano un modello a parametri concentrati per la descrizione dell'andamento del flusso e della pressione del sangue nel vaso cilindrico deformabile Ω : esse coinvolgono i valori medi di pressione e portata nel dominio.

Sulla base di questo modello elementare è possibile costruire un modello più complesso dell'intero sistema circolatorio. Prima di fare ciò si può osservare che i coefficienti delle equazioni ottenute sono stati ricavati con un processo di integrazione e costituiscono i parametri concentrati che racchiudono tutte le informazioni riguardanti la geometria e le proprietà meccaniche del modello fluido-struttura. Si definisce ora

$$R = \frac{8\mu l}{\pi R_0^4}, \quad L = \frac{\rho l}{\pi R_0^2}, \quad C = \frac{3\pi R_0^3 l}{2Eh}, \quad (3.6)$$

dove R rappresenta la resistenza che incontra il flusso a causa della viscosità del sangue, L rappresenta il termine inerziale ed è detta induttanza del flusso, infine C rappresenta l'elasticità e la deformabilità del vaso sanguigno. Con la notazione introdotta le equazioni (3.5) diventano

$$\begin{cases} C \frac{d\hat{P}}{dt} + Q_2 - Q_1 = 0 \\ L \frac{d\hat{Q}}{dt} + R\hat{Q} + P_2 - P_1 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Se ora si ipotizza che siano noti i valori di Q_1 e P_2 il sistema (3.7) è costituito da due equazioni in quattro incognite \hat{Q} , \hat{P} , P_1 e Q_2 . Per poter chiudere il sistema è necessario fare un'ulteriore ipotesi: è possibile approssimare ragionevolmente i valori incogniti P_1 e Q_2 nelle sezioni di ingresso ed uscita del flusso con le variabili di stato \hat{P} e \hat{Q} , cioè

$$\hat{P} \approx P_1, \quad \hat{Q} \approx Q_2$$

In seguito a quest'ultima assunzione il modello a parametri concentrati per un vaso cilindrico diventa

$$\begin{cases} C \frac{dP_1}{dt} + Q_2 = Q_1 \\ L \frac{dQ_2}{dt} + R\hat{Q}_2 - P_1 = P_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

dove si ricorda che Q_1 e P_2 sono supposti noti.

Nell'analogia con il circuito elettrico, il flusso del sangue equivale alla corrente elettrica mentre la pressione equivale al potenziale, come schematizzato in Tabella 3.1.

Rete Idraulica	Rete elettrica
Pressione	Potenziale
Portata	Corrente
Viscosità	Resistenza R
Inerzia	Induttanza L
Elasticità	Capacità C

Tabella 3.1: Analogie tra rete idraulica e rete elettrica

Il sistema che è stato ricavato, il cui analogo elettrico, detto *circuito a L*, è rappresentato in Figura 3.3, può essere utilizzato nel caso in cui siano noti i valori Q_1 e P_2 , che corrispondono rispettivamente ad una condizione di Dirichlet sulla sezione di ingresso ed a una condizione di Neumann sulla sezione di uscita nelle equazioni 3D di partenza. Nel caso in cui le condizioni al bordo fossero differenti, sarebbe necessario correggere in modo opportuno questo modello elementare: a seconda delle diverse condizioni al contorno si ottengono i modelli a *L-invertito*, a π e a *T*. I quattro differenti circuiti derivano dalle quattro combinazioni possibili di condizioni prescritte nelle sezioni di ingresso e di uscita nel modello di partenza.

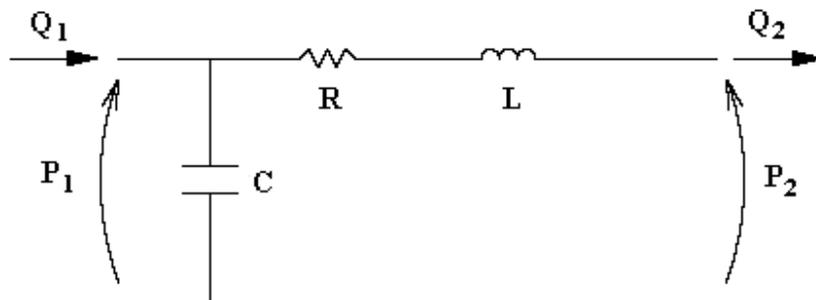


Figura 3.3: Modello circuitale a L

Si consideri ora il modello tridimensionale da noi studiato nel quale è stata imposta su entrambe le sezioni Γ_{in} e Γ_{out} una condizione di Neumann. E' necessario dunque correggere il modello circuitale a L introducendo una nuova induttanza ed una nuova resistenza: il circuito che si ottiene è detto *circuito*

a T. Utilizzando un'opportuna notazione, il sistema di equazioni differenziali che descrive il comportamento del nostro modello assume la forma seguente

$$\begin{cases} C_0 \frac{dP_0}{dt} + Q_{in} - Q_{out} = 0 \\ L_{in} \frac{dQ_{in}}{dt} + R_{in} Q_{in} + P_{in} - P_0 = 0 \\ L_{out} \frac{dQ_{out}}{dt} + R_{out} Q_{out} + P_0 - P_{out} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

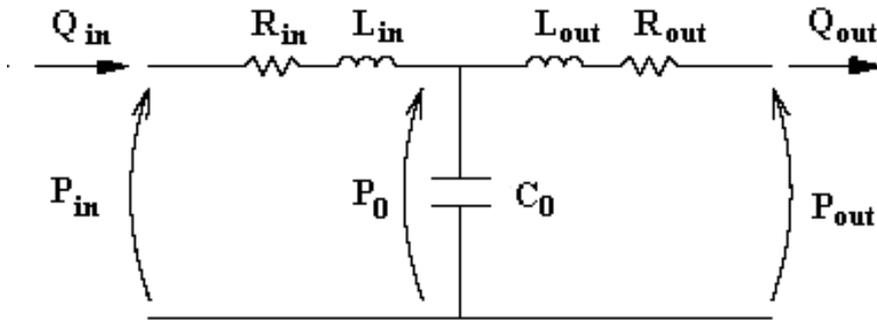


Figura 3.4: Modello circuitale a T

Il sistema (3.9) rappresenta l'analogo elettrico del modello tridimensionale di arteria che si sta analizzando, come mostrato in Figura 3.4. Fissando opportunamente i coefficienti, la risoluzione del sistema ci fornisce l'andamento nel tempo delle variabili caratteristiche P_{in} e P_{out} nelle sezioni estreme del vaso sanguigno (note Q_{in} e Q_{out}), ma non ci dà alcuna indicazione dei valori assunti da tali grandezze nei punti interni del vaso.

3.3 Il modello a parametri concentrati per il sistema cardiocircolatorio

Nel paragrafo precedente ci si è limitati a costruire un modello 0D per un singolo tratto di arteria: la risoluzione del relativo sistema differenziale richiede che siano noti i valori di Q_{in} e Q_{out} . Per poter fornire al nostro modello elettrico valori ragionevoli e fisiologici è possibile chiudere il circuito in modo che le nuove componenti circuitali simulino in modo sufficientemente accurato la dinamica del sistema cardiocircolatorio. Per costruire un modello a parametri concentrati del sistema cardiovascolare o di una sua porzione è sufficiente considerare l'accoppiamento di più modelli 0D, formando così una vera e propria rete elettrica. A titolo di esempio si costruisce il modello mostrato in Figura 3.5, semplice ma sufficientemente accurato per il tipo di indagine che si intende svolgere.

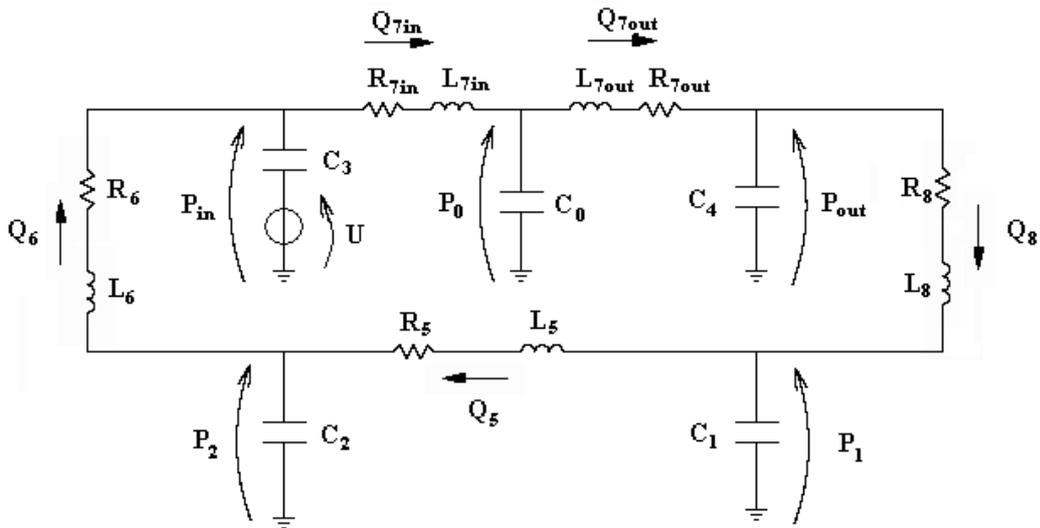


Figura 3.5: Modello a parametri concentrati del sistema cardiocircolatorio

Ciascun elemento circuitali che costituisce il modello di figura 3.5 rappresenta una parte elementare dell'intero sistema cardiocircolatorio, come schematizzato in Tabella 3.2.

Componenti sistema circolatorio	Componenti circuitali
Cuore	U, C_3
Modello di arteria tridimensionale	$R_{7in}, L_{7in}, C_0, L_{7out}, R_{7out}$
Sistema arterioso	C_4, R_8, L_8
Capillari	C_1, L_5, R_5
Sistema venoso	C_2, L_6, R_6

Tabella 3.2: Corrispondenza tra gli elementi del sistema circolatorio ed il modello a parametri concentrati

Dal punto di vista matematico, un generico modello a parametri concentrati è rappresentato da un sistema di equazioni differenziali nella forma

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = B(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) & t \in (0, T], \\ G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

con la condizione iniziale $\mathbf{y}|_{t=t_0} = \mathbf{y}_0$. Con questa notazione, \mathbf{y} è il vettore delle variabili di stato del circuito, cioè tensioni e correnti associate rispettivamente a capacità e induttanze, \mathbf{z} include le altre variabili del circuito e G rappresenta le equazioni che derivano dalle leggi di Kirchhoff. Se si suppone che la matrice Jacobiana

$$J := \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}$$

sia non singolare, per il teorema delle funzioni implicite è possibile esprimere \mathbf{z} in funzione di \mathbf{y} e formulare il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \Phi(\mathbf{y}, t) = A(\mathbf{y}, t)\mathbf{y} + \mathbf{r}(t) & \text{per } t \in (0, T], \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 & \text{per } t = t_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

La matrice tempo-dipendente A è legata ai termini resistivi, induttivi e capacitivi del circuito, mentre \mathbf{r} rappresenta il termine forzante. Si ricorda ora che

Teorema 1. *Se $\Phi(\mathbf{y}, t)$ è differenziabile con continuità allora esiste un intervallo temporale $[0, T]$ nel quale la soluzione del problema esiste ed è unica. Se inoltre le derivate $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}$ sono limitate in tutto l'intervallo $[0, T]$, allora la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica nell'intervallo $[0, T]$.*

In seguito si supporrà che le ipotesi appena enunciate risultino verificate.

Dal punto di vista numerico, per la risoluzione del modello a parametri concentrati si è scelto di utilizzare il metodo di Eulero Esplicito:

$$\mathbf{y}^{n+1} = (I + \Delta t A(\mathbf{y}^n, t^n)) \mathbf{y}^n + \Delta t \mathbf{r}(t^n).$$

Per il circuito che si sta trattando, rappresentato in Figura 3.5, il vettore di stato che include tutte le variabili caratteristiche del circuito è il seguente:

$$\mathbf{y}(t) = [P_1, P_2, P_{in}, P_{out}, P_0, Q_5, Q_6, Q_{7in}, Q_{7out}, Q_8]^T$$

La matrice A , nel caso in questione, è costante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_4} & \frac{1}{C_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_0} & \frac{1}{C_0} & 0 \\ -\frac{1}{L_5} & \frac{1}{L_5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_5}{L_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_6} & \frac{1}{L_6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_6}{L_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{7in}} & 0 & \frac{1}{L_{7in}} & 0 & 0 & -\frac{R_{7in}}{L_{7in}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{7out}} & -\frac{1}{L_{7out}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{7out}}{L_{7out}} & 0 \\ \frac{1}{L_8} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_8}{L_8} \end{bmatrix}$$

In particolare le costanti $C_0, L_{7in}, L_{7out}, R_{7in}$ e R_{7out} sono relative al modello tridimensionale da noi studiato e possono essere ricavate dalle relazioni (3.6).

Il termine forzante, infine, è tempo dipendente ed il suo andamento è legato alla funzione $U(t)$ che rappresenta, come riportato in Tabella 3.2, la dinamica del cuore:

$$\mathbf{r}(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, -U(t), U(t), 0, 0]^T \quad (3.12)$$

Ponendo, ad esempio, $U(t) = A(1 - \cos(\frac{2\pi t}{T}))$ si ottiene un termine forzante che simula in modo molto elementare l'effetto del cuore nel sistema cardiocircolatorio. Esistono modelli per il cuore assai più raffinati che non è stato però ritenuto opportuno utilizzare in questo contesto.

3.4 L'accoppiamento dei modelli 3D e 0D

La buona posizione del problema accoppiato 3D/0D è stata dimostrata, nel caso di struttura indeformabile, in [23], mentre non esiste ancora un'analisi matematica approfondita per il corrispondente modello deformabile. Tuttavia, anche in base ai risultati riportati in [18] ed in questo lavoro, è ragionevole aspettarsi che anche il modello multiscala che accoppia un solutore fluido-struttura 3D ed uno a parametri concentrati 0D sia ben posto, a patto che lo siano i due problemi separatamente.

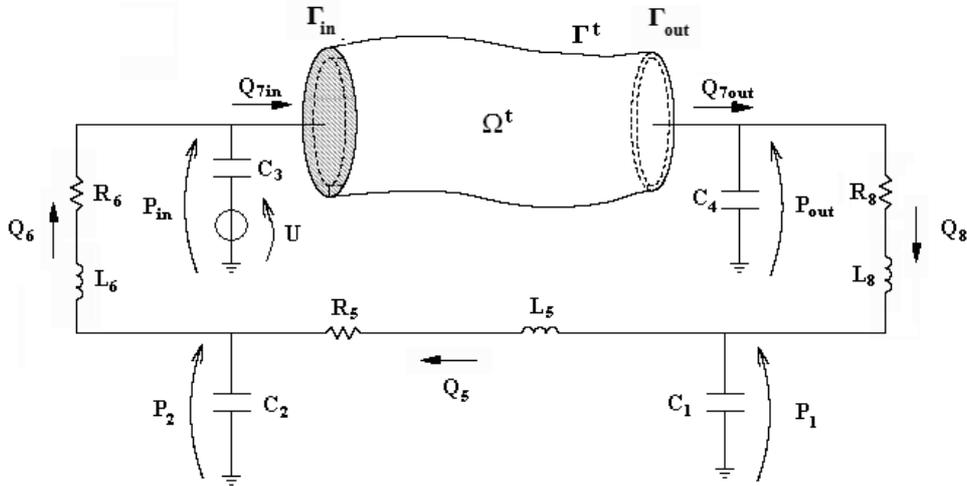


Figura 3.6: Accoppiamento 3D-0D

Si sostituisca dunque nel circuito completo rappresentato in Figura 3.5 il modello a parametri concentrati del vaso sanguigno in questione con l'equivalente modello tridimensionale, come mostrato in Figura 3.6.

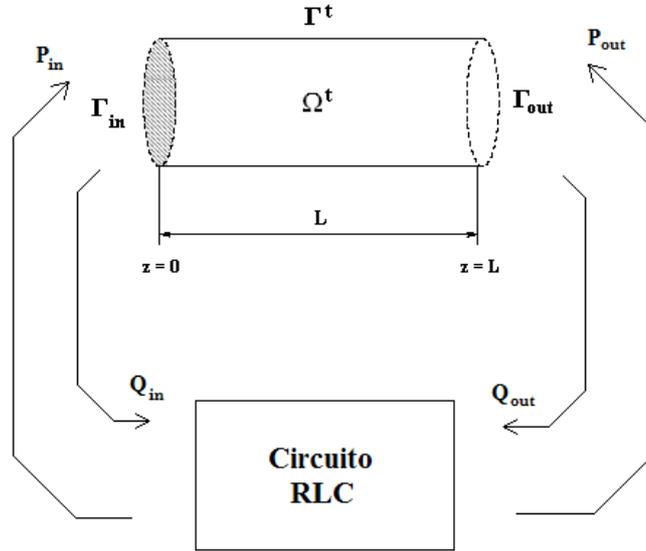


Figura 3.7: Accoppiamento dei due modelli

E' necessario prestare particolare attenzione al trattamento dell'interfaccia tra i due modelli. Innanzitutto la connessione deve garantire la conservazione del flusso e del momento in corrispondenza delle interfacce e, come diretta conseguenza dell'analogia elettrica, le grandezze da monitorare sono pressione P e portata Q in corrispondenza delle interfacce. Nell'analogia con il circuito elettrico, queste relazioni di conservazione corrispondono all'applicazione delle *leggi di Kirchhoff* per i nodi (conservazione della corrente) e per le maglie (conservazione del potenziale). In secondo luogo, come si è già osservato, i due modelli presentano differenti livelli di dettaglio. Ci si aspetta, dunque, che il modello tridimensionale, più accurato, necessiti sull'interfaccia di molte più informazioni di quelle che il modello a parametri concentrati sia in grado di fornire, essendo quest'ultimo molto meno accurato. Il modello elettrico infatti ci fornisce soltanto dei valori medi sulle sezioni: tali valori non sono sufficienti a garantire la buona posizione del problema fluido-struttura tridimensionale e si parla dunque di *condizioni al bordo deficitarie*.

E' necessario dunque sviluppare una strategia per tradurre l'informazione fornita dai due diversi modelli in modo che questi possano tra loro "comunicare". La risoluzione di questo problema non è banale, in quanto la scelta che si andrà ad effettuare influenzerà e perturberà in modo incontrollato la soluzione numerica del problema tridimensionale.

Nel caso di studio in questione, il modello fluido-struttura tridimensionale vede imposte, su entrambe le sezioni estreme Γ_{in} e Γ_{out} una condizione di Neumann: dunque è necessario che riceva come dati dal modello a parametri concentrati la pressione sulla sezione d'ingresso Γ_{in} e sulla sezione di uscita Γ_{out} . Viceversa il modello a parametri concentrati necessita, come è già stato sottolineato, dei valori di flusso $Q_{\tau_{in}}$ e $Q_{\tau_{out}}$ che vengono forniti dal modello 3D, come mostrato in Figura 3.7.

Si definisca ora $\Gamma_{0D} = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ la porzione di bordo sulla quale il modello fluido-struttura necessita di opportune condizioni assorbenti determinate dal modello 0D e sia k_{0D} la condizione di Neumann assorbente prescritta su Γ_{0D} .

Il problema accoppiato può dunque essere formulato come segue:

Problema 4. *Dati $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ (con $\nabla(\mathbf{u}_0) = 0$), $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\eta_0 \in W^0$, trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^t$, $p \in Q^t$, $\tilde{\eta} \in W^0$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{L}^\infty(0, T)$ tali che $\forall t \in (0, T_0]$, $\forall(\mathbf{v}, \tilde{\chi}) \in \mathbf{S}^t$ e $q \in Q^t$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(\mathbf{y}, t)\mathbf{y} + \mathbf{r}(t) \\ \rho_f \left(\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ \quad + \rho_s h_s \left(\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2}, \tilde{\chi} \right)_{\Gamma^0} + (\beta \tilde{\eta}, \tilde{\chi})_{\Gamma^0} = \int_{\Gamma_{0D}^t} k_{0D} \mathbf{n} d\gamma \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{\Gamma^t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_3) \Big|_{\Gamma^t}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_3) \Big|_{\Gamma^0}, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

dove k_{0D} è determinato a partire dalle relazioni seguenti:

$$k_{0D} |_{\Gamma_{in}^t} = -P_{in} |_{\Gamma_{in}^t}$$

$$k_{0D} |_{\Gamma_{out}^t} = -P_{out} |_{\Gamma_{out}^t},$$

mentre gli ingressi del vettore $\mathbf{r}(t)$ sono dati da

$$Q_{\gamma_{in}} = \int_{\Gamma_{in}^t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma$$

$$Q_{\gamma_{out}} = \int_{\Gamma_{out}^t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

Si può osservare che, dal momento che il modello a parametri concentrati, meno accurato, non ci fornisce informazioni riguardanti l'effettiva distribuzione delle pressioni sulle sezioni estreme del vaso, ma solo dei valori medi, per poter fornire i dati al bordo necessari al modello tridimensionale si è supposto che, in prima approssimazione, la distribuzione di pressione abbia solo componente normale alle sezioni Γ_{in} e Γ_{out} e su di esse sia uniforme (si veda [23, 11]).

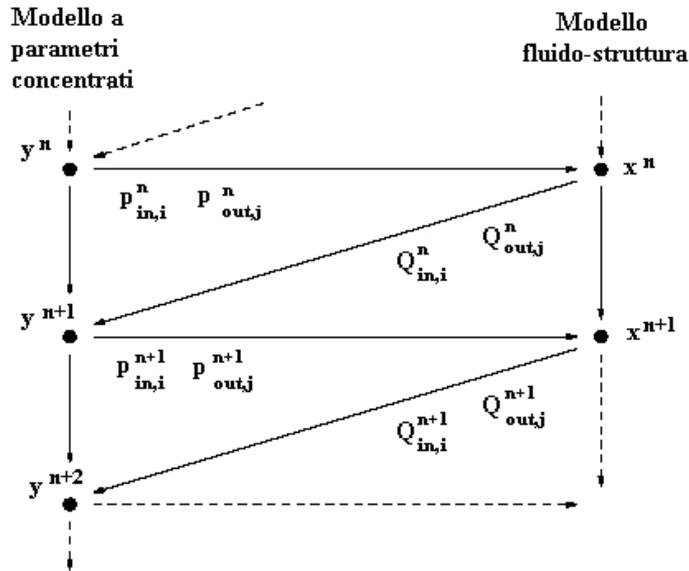


Figura 3.8: Accoppiamento dei due modelli

Per risolvere numericamente il problema accoppiato, si è scelto un approccio iterativo basato sullo *splitting* del problema 4 nei due sottoproblemi che lo costituiscono, il problema fluido-struttura 3D ed il problema a parametri concentrati 0D, supponendo di disporre di due codici per la risoluzione dei due problemi separatamente.

Adottando un approccio iterativo, si devono risolvere, alternandoli, il problema fluido-struttura tridimensionale ed il modello a parametri concentrati, dove i rispettivi dati al bordo vengono forniti dall'iterazione precedente. Nel caso particolare in cui il modello a parametri concentrati viene risolto con il metodo di Eulero Esplicito, l'algoritmo si riduce alla soluzione del problema tridimensionale e della rete elettrica una sola volta ad ogni passo temporale.

Utilizzando un approccio multiscala si ottiene dunque una soluzione maggiormente accurata rispetto a quella calcolata con il semplice modello tridimensionale con condizioni al contorno assorbenti: inoltre tale guadagno in termini di accuratezza non comporta un incremento eccessivo del costo computazionale.

Capitolo 4

Gli algoritmi numerici

4.1 L'algoritmo di interazione fluido-struttura

Si consideri il cilindro Ω rappresentato in Figura 4.1 e si definisca Γ_{ABS} la porzione di bordo sulla quale vengono imposte condizioni di Neumann assorbenti introdotte nella Sezione 1.5.

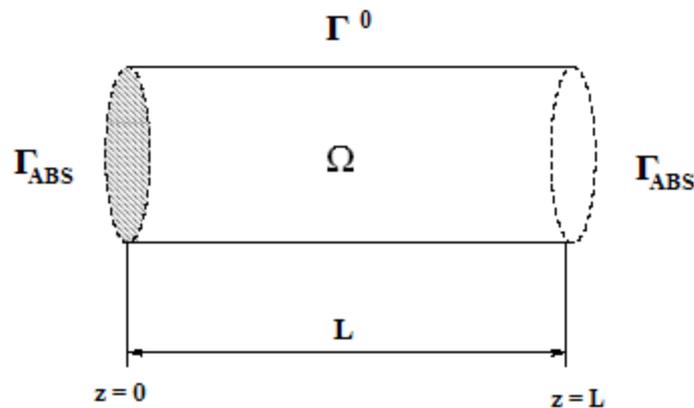


Figura 4.1: Dominio cilindrico

Si definisca inoltre $k_{ABS} \in \mathbb{R}$ la condizione assorbente su Γ_{ABS} ricavata dalla relazione (1.25), cioè

$$\sigma_f \mathbf{n}|_{\Gamma_{ABS}} = k_{ABS} \mathbf{n}|_{\Gamma_{ABS}}.$$

L'algoritmo iterativo che permette di risolvere il problema fluido-struttura (1.19) applicato alla geometria considerata può essere schematizzato come segue.

Algoritmo 1. Date le quantità al passo temporale n , $\mathbf{u}^n, \eta^n, k_{ABS}^n$, la mappa \mathbf{x}_f^n ed il dominio Ω^n :

1. Risolvere il problema fluido nella configurazione Ω^n :
trovare $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V}^n$ e $p^{n+1} \in Q^n$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_f}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n + a(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n + (((\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_n \\ \quad + \int_{\Gamma^n} \left(\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \Delta t \right) u_3^{n+1} v_3 \delta^n d\gamma - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v})_n \\ \quad = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v})_n + \int_{\Gamma_{ABS}^n} k_{ABS}^n \mathbf{n} d\gamma \\ \quad - \int_{\Gamma^n} \left(\left(-\frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} + \beta \right) \eta^n + \frac{\rho_s h_s}{\Delta t^2} \eta^{n-1} \right) v_3 \delta^n d\gamma \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})_n = 0, \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \eta^0}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_3)|_{\Gamma^0}, \quad \eta^0 = \eta_0, \end{array} \right.$$

per tutti $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ e $q \in Q^n$.

2. Calcolare lo spostamento della struttura utilizzando la relazione (1.16), ricordando che η è una grandezza riferita alla configurazione di riferimento:

$$\eta^{n+1} = \Delta t u_3^{n+1} + \eta^n.$$

3. Risolvere l'estensione armonica: trovare $\mathbf{w}^{n+1} \in \mathbf{M}^0$ tale che

$$\begin{cases} (\nabla \tilde{\mathbf{w}}^{n+1}, \nabla \tilde{\psi})_0 = 0 \\ \mathbf{w}^{n+1}|_{\Gamma^n} = \mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma^n} \end{cases}$$

per ogni $\tilde{\psi} \in M^0$.

4. Muovere i punti del dominio del fluido

$$\mathbf{x}_f^{n+1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_f^n(\mathbf{x}_0) + \Delta t \tilde{\mathbf{w}}^{n+1}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega^0.$$

5. Calcolare la condizione al bordo di Neumann su Γ_{ABS} dalla relazione (1.25)

$$(k_{ABS}^{n+1} \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_{ABS}^{n+1}} = \left(\left(\left(\frac{\sqrt{\rho_f} Q^{n+1}}{2\sqrt{2} A^{n+1}} + \sqrt{\beta \sqrt{A^0}} \right)^2 - \beta \sqrt{A^0} \right) \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_{ABS}^{n+1}}$$

dove Q^{n+1} e A^{n+1} sono rispettivamente il flusso attraverso la sezione Γ_{ABS}^{n+1} e l'area di Γ_{ABS}^{n+1} .

L'algoritmo presentato per la risoluzione del problema fluido-struttura (1.19) risulta essere particolarmente efficiente e poco oneroso dal punto di vista computazionale. Infatti, la scelta di trattare in modo esplicito il movimento del fluido e di includere la struttura come condizione al bordo di Robin per il problema fluido, rende possibile la risoluzione dell'accoppiamento fluido-struttura tramite la risoluzione di un unico problema fluido ad ogni passo temporale, senza, dunque, ricorrere a sottoiterazioni.

4.2 L'algoritmo di accoppiamento 3D/0D

Si considerino ora il modello accoppiato 3D/0D rappresentato in figura 4.2 ed il problema accoppiato (3.13). Si definisca $\Gamma_{0D} = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ la porzione di bordo del cilindro Ω all'interfaccia con la rete e si definisca k_{0D} la condizione di Neumann, fornita dalla rete, imposta su Γ_{0D} . Si osservi che l'accoppiamento 3D/0D proposto prevede che k_{0D} sia un dato ricavato dalla risoluzione del modello a parametri concentrati.

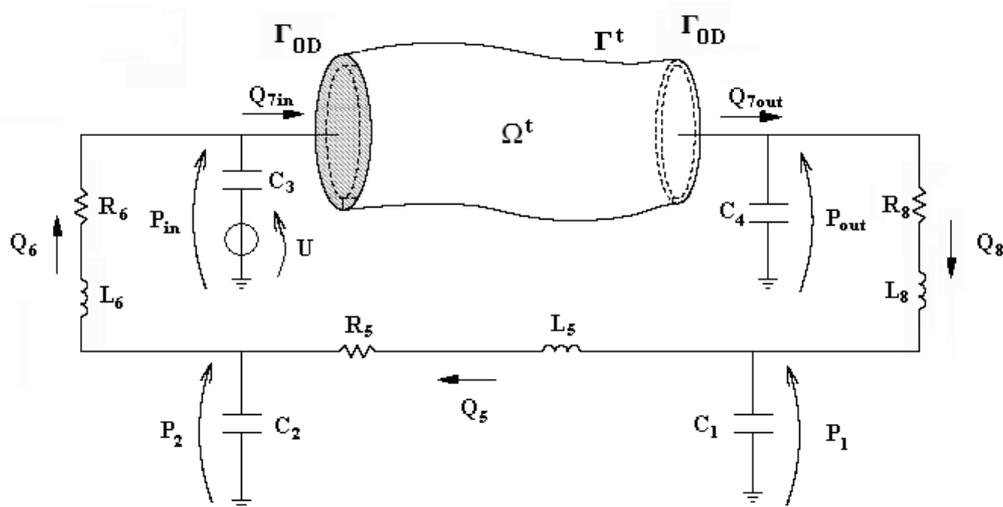


Figura 4.2: Modello multiscala 3D/0D

L'algoritmo iterativo che permette di risolvere tale problema può essere schematizzato come segue.

Algoritmo 2. Date le quantità al passo temporale n , $\mathbf{u}^n, \eta^n, k_{0D}^n, \mathbf{y}^n, \mathbf{r}^n$, la mappa \mathbf{x}_f^n ed il dominio Ω^n :

1. Risolvere il problema fluido nella configurazione Ω^n con l'Algoritmo 1.
2. Calcolare i flussi Q_{7in}^{n+1} e Q_{7out}^{n+1} utilizzando le relazioni

$$Q_{7in}^{n+1} = \int_{\Gamma_{in}^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma$$

$$Q_{7out}^{n+1} = \int_{\Gamma_{out}^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma.$$

3. Risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie relative al circuito che modella la restante parte del sistema cardiocircolatorio:

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t A \mathbf{y}^n + \Delta t \mathbf{r}^n,$$

ricavando in particolare P_{0D}^{n+1} su Γ_{0D}^{n+1} .

4. Calcolare k_{0D}^{n+1} dalla relazione

$$k_{0D}^{n+1} = -P_{0D}^{n+1},$$

dove P_{0D}^{n+1} è la pressione in corrispondenza di Γ_{0D}^{n+1} .

La strategia scelta di accoppiare il modello fluido-struttura con una semplice rete elettrica, come mostrato in Figura 3.6, permette di migliorare l'accuratezza del modello ed allo stesso tempo, grazie all'efficacia dell'algoritmo presentato nella Sezione 4.1, di avere un costo computazionale limitato. Infatti, sia il problema fluido, sia la rete elettrica, devono essere risolti un'unica volta ad ogni passo temporale.

Capitolo 5

I risultati numerici

Vengono presentati in questo Capitolo alcuni risultati numerici con lo scopo di testare i modelli, i metodi e gli algoritmi presentati nei capitoli precedenti. Per la risoluzione del problema fluido-struttura si è utilizzato il codice FreeFem++, ideato per la risoluzione numerica di equazioni a derivate parziali con il metodo degli Elementi Finiti e sviluppato da O. Pironneau, F. Hecht, K. Ohtsuka e A. Le Hyaric.

Innanzitutto si considera il modello fluido-struttura assialsimmetrico presentato nel Capitolo 1, prestando particolare attenzione alla capacità delle condizioni assorbenti presentate nella Sezione 1.4 di simulare la dinamica reale di un'arteria. In seguito vengono analizzati i risultati delle simulazioni ottenuti con il modello proposto nel Capitolo 2 per valutare, come ci si era proposti, gli effetti della presenza di una protesi vascolare.

Vengono poi presentati i risultati relativi agli effetti di un restringimento del lume dell'arteria, andando a valutare se le condizioni al bordo ricavate in [20] e proposte per un cilindro nel Capitolo 1 sono sufficientemente accurate anche per questo modello.

Nell'ultima Sezione vengono proposti i risultati numerici ottenuti accoppiando il modello 3D con il modello 1D come illustrato nel Capitolo 3.

5.1 Arteria semplice

Si considera ora il modello fluido-struttura per un'arteria presentato nel Capitolo 1 con i valori dei parametri fisici riportati in Tabella 5.1. Si riportano viceversa in Tabella 5.2 i dati relativi al fluido.

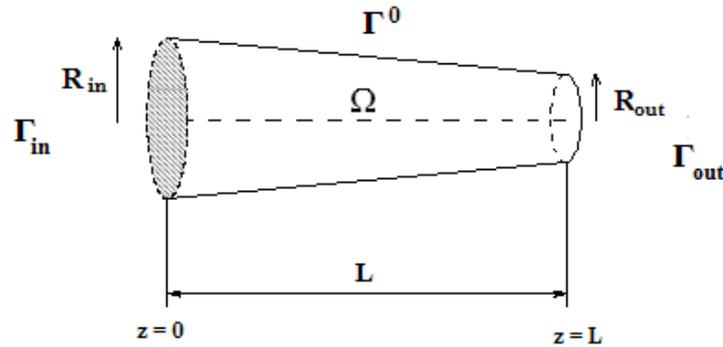


Figura 5.1: Modello di arteria cilindrica

Parametro	Valore numerico
Lunghezza L	6.0 cm
Raggio R_0	0.75 cm
Spessore h_s	0.065 cm
Densità ρ_s	$1 \frac{g}{cm^3}$
Modulo di Young E	$4.8 \cdot 10^6 \frac{dyne}{cm^2}$
Modulo di Poisson ν	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.1: Parametri fisici della struttura

Nelle simulazioni riportate in questa Sezione, dunque, il dominio computazionale è costituito da un cilindro generato dalla rotazione attorno all'asse di un rettangolo di dimensioni 6.0×0.75 cm. I parametri numerici utilizzati per le successive simulazioni sono riportati in Tabella 5.3.

Nel primo gruppo di immagini sono riportate le pressioni medie registrate in successive sezioni dell'arteria nel tempo imponendo uno sforzo di tipo impulsivo

Parametro	Valore numerico
Densità ρ_f	$1 \frac{g}{cm^3}$
Viscosità cinematica μ	$0.035 \frac{cm^3}{s}$

Tabella 5.2: Parametri fisici del fluido

Parametro	Valore numerico
T	$0.1 s$
Passo spaziale assiale h_1	$0.1 cm$
Passo spaziale radiale h_2	$0.15 cm$
Passo temporale Δt	$0.001 s$
Elementi finiti per \mathbf{u}	Lineari a bolla
Elementi finiti per η	Lineari a bolla
Elementi finiti per p	Lineari a pezzi

Tabella 5.3: Parametri numerici della simulazione

nella sezione di ingresso Γ_{in} per $t \leq 0.005 s$ e la condizione assorbente ricavata nel Capitolo 1 per $t > 0.005 s$, cioè

$$\sigma_f \mathbf{n} = P \mathbf{n},$$

dove

$$P = \begin{cases} 2500 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi t}{0.0025} \right) \right) \frac{dyne}{cm^2} & \text{per } t \leq 0.005 s \\ \left(\left(\left(\frac{\sqrt{\rho_f} Q}{2\sqrt{2} A} + \sqrt{\beta \sqrt{A^0}} \right)^2 - \beta \sqrt{A^0} \right) \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_{in}} & \text{per } t > 0.005 s. \end{cases} \quad (5.1)$$

con Q e A rispettivamente il flusso attraverso la sezione Γ_{in} e l'area di Γ_{in} .

Per poter valutare la correttezza delle condizioni al bordo assorbenti imposte, viene proposto il confronto con le pressioni registrate nel caso in cui le condizioni al bordo non siano assorbenti. Come è possibile osservare dai grafici

di figura 5.2, l'entità delle riflessioni spurie in assenza di adeguate condizioni assorbenti non è trascurabile.

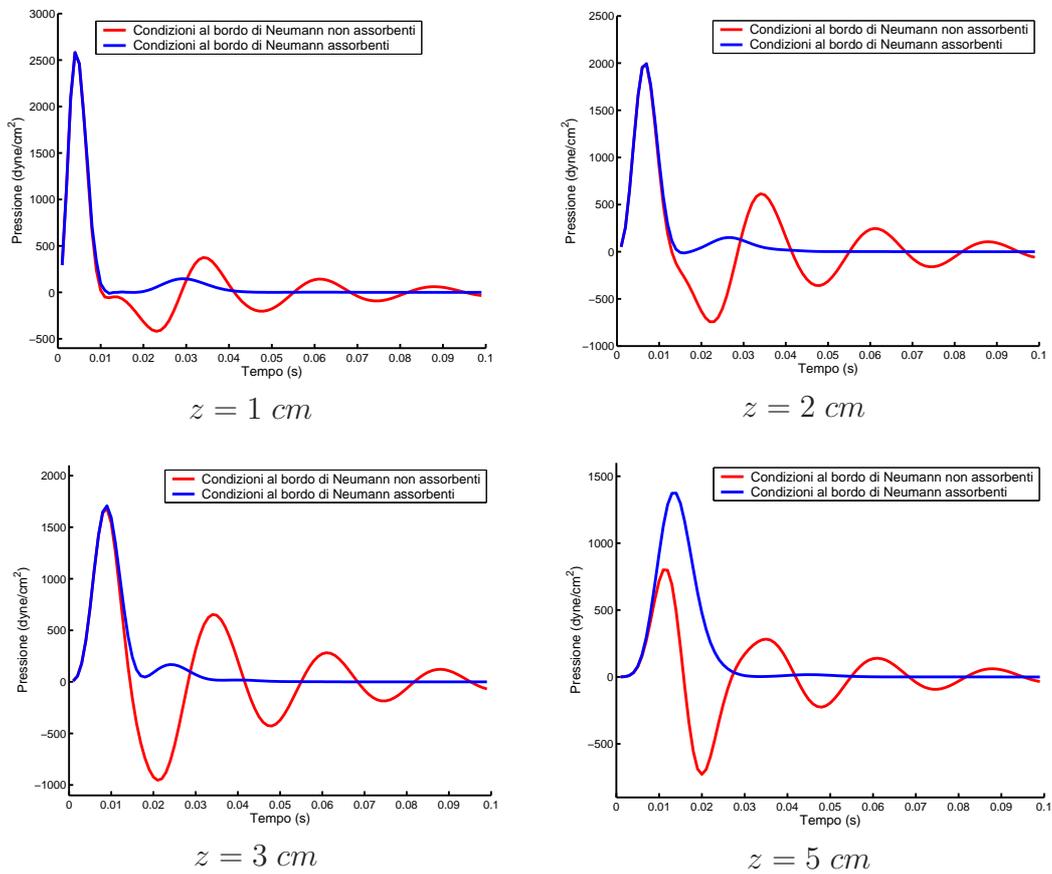
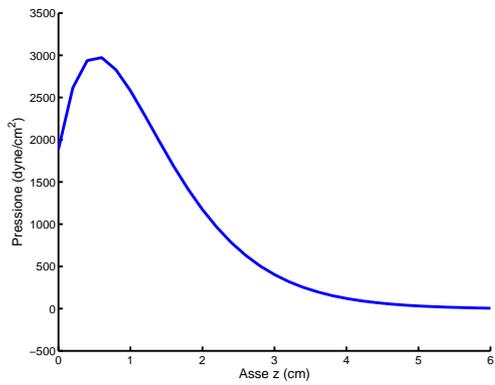
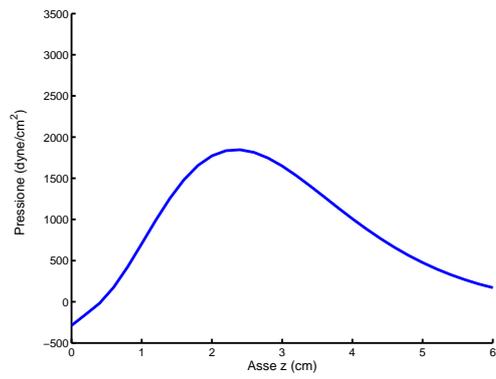


Figura 5.2: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

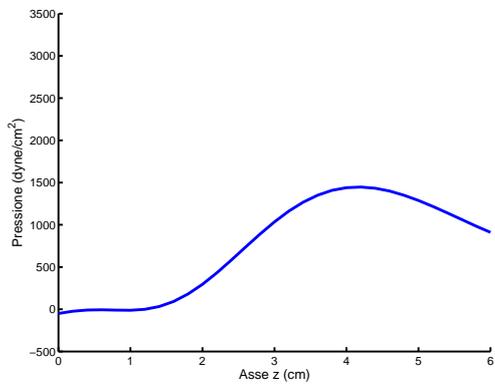
I grafici riportati in Figura 5.3, ottenuti con la medesima simulazione precedente, mostrano l'andamento dell'onda di pressione lungo l'arteria in successivi istanti temporali.



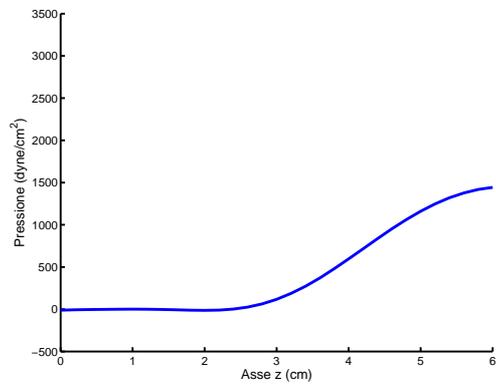
$t = 0.004 \text{ s}$



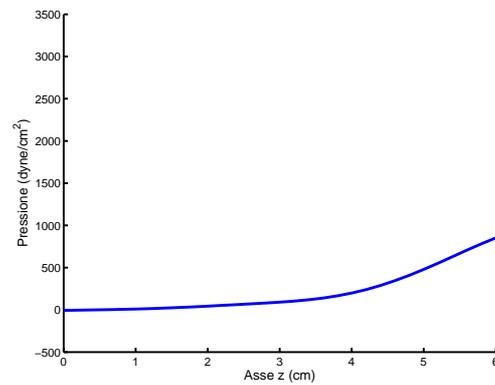
$t = 0.008 \text{ s}$



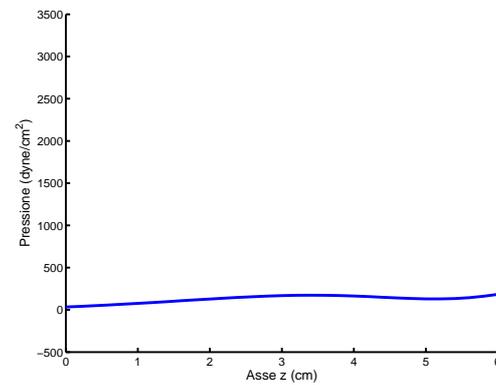
$t = 0.012 \text{ s}$



$t = 0.016 \text{ s}$



$t = 0.020 \text{ s}$



$t = 0.024 \text{ s}$

Figura 5.3: Pressione media nel vaso sanguigno in istanti temporali successivi

Un andamento analogo caratterizza anche lo spostamento della parete vascolare causato dall'impulso di pressione, come mostrato nei grafici di figura 5.4.

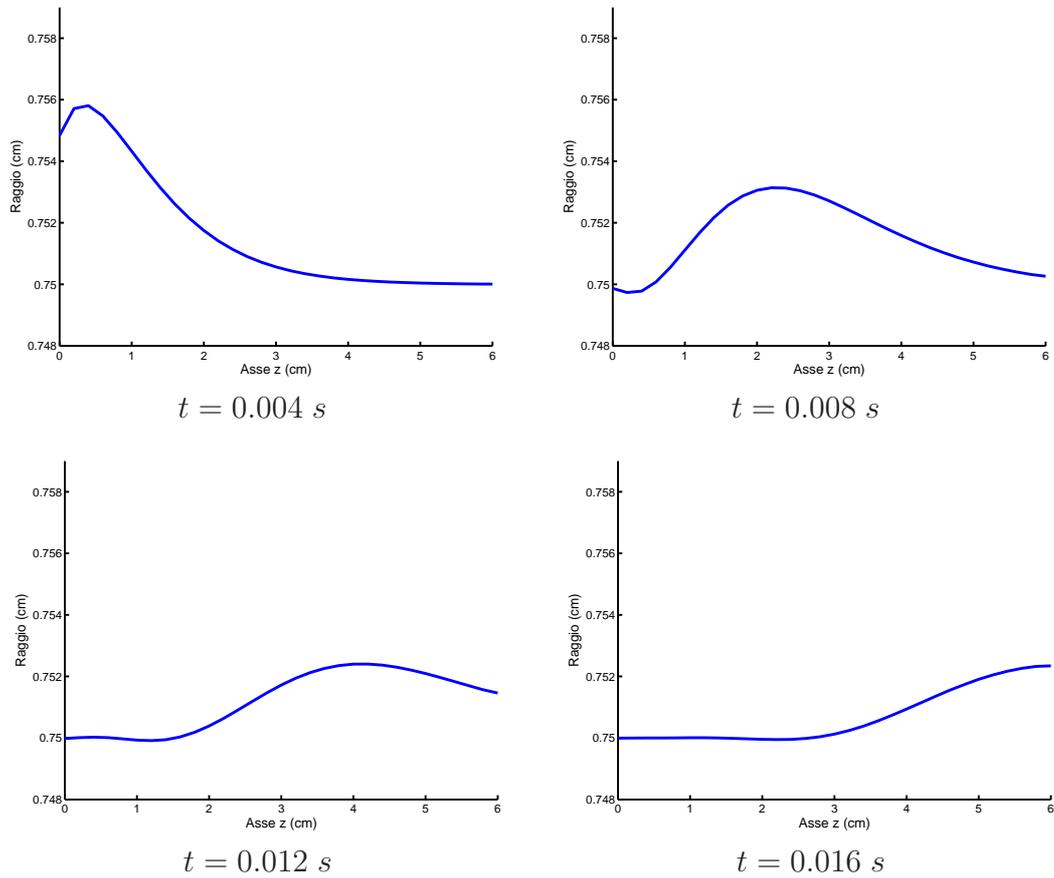


Figura 5.4: Raggio dell'arteria in istanti successivi di tempo

Si osservi ora nelle figure 5.2 e 5.3 che i valori di pressione imposti non sono fisiologici. E' noto che, nel caso del sistema cardiocircolatorio umano, i valori di pressione arteriosa oscillano in fase di diastole intorno a 70 mmHg mentre in fase di sistole intorno a 120 mmHg . Essendo la durata della fase di diastole pari a circa 4 volte la durata della fase di sistole, possiamo supporre che il sangue e la parete dell'arteria si trovino, nella fase di diastole, in uno stato stazionario. Dalla relazione (1.3) possiamo ricavare il raggio dell'arteria in condizioni stazionarie, cioè

$$\beta \bar{\eta} = f_s,$$

dunque

$$\bar{\eta} = \frac{f_s}{\beta} \simeq 0.15 \text{ cm}.$$

Per simulare un andamento di pressione fisiologico nell'arteria, si supponga che al tempo iniziale $t = 0$ il fluido e la parete del vaso siano in uno stato stazionario, cioè che la pressione sia pari a $P_0 = 70 \text{ mmHg}$ ed il raggio sia pari a $R_0 = \bar{R} + \bar{\eta} = 0.90 \text{ cm}$. Se si considera ora il seguente ingresso fisiologico

$$P = 25 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi t}{0.1} \right) \right) \text{ mmHg} \quad \text{per } t \leq 0.2 \text{ s} \quad (5.2)$$

e la condizione assorbente (1.25)

$$P = \left(\left(\left(\frac{\sqrt{\rho_f} Q}{2\sqrt{2} A} + \sqrt{\beta \sqrt{A^0}} \right)^2 - \beta \sqrt{A^0} \right) \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_{in}} \quad \text{per } 0.2 < t < 0.8 \text{ s}.$$

con i parametri fisici riportati in Tabella 5.4, si ottiene l'andamento di pressione mostrato nei grafici di figura 5.5.

Si osservi che il valore massimo di pressione tra la sezione di ingresso e la sezione di uscita del vaso rimane praticamente inalterato. L'andamento del raggio dell'arteria è invece mostrato nei grafici di figura 5.6.

Parametro	Valore numerico
Lunghezza L	6.0 cm
Raggio \bar{R}	0.75 cm
Spessore h_s	0.065 cm
Densità ρ_s	$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Modulo di Young E	$4.8 \cdot 10^6 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$
Modulo di Poisson ν	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.4: Parametri fisici della struttura

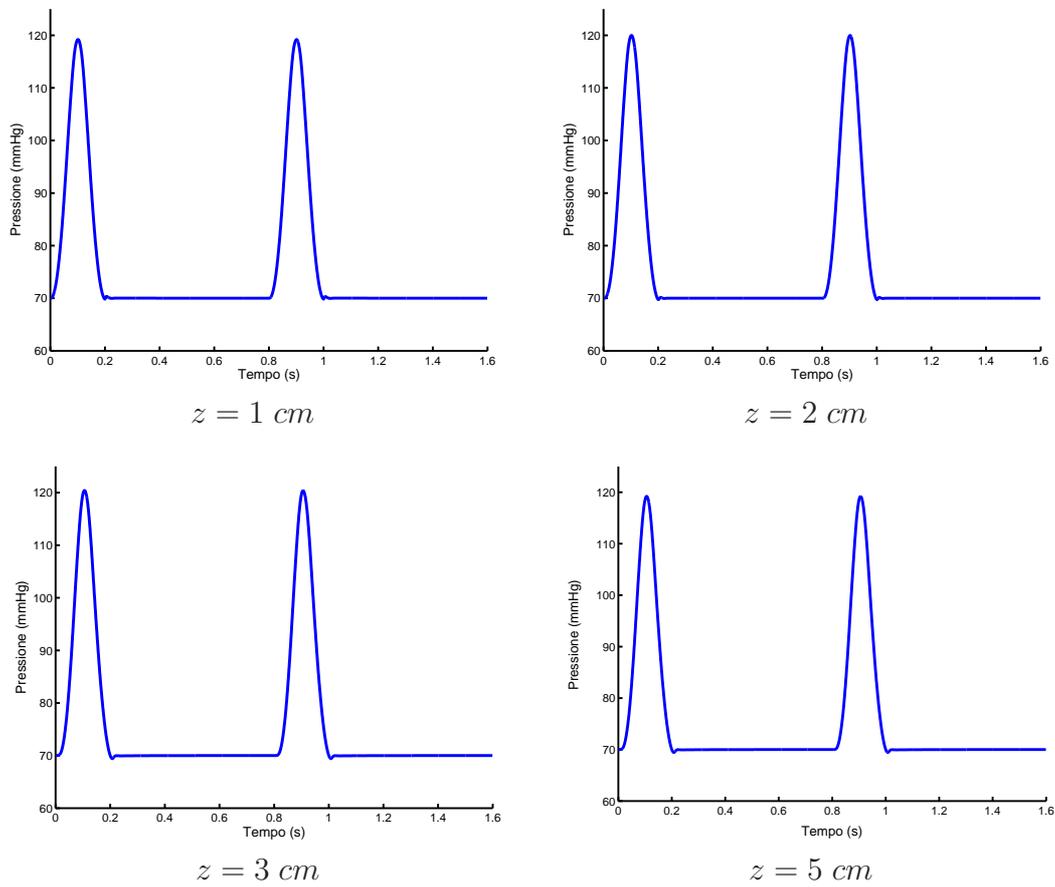
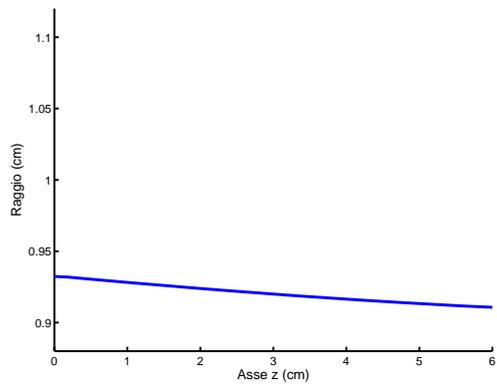
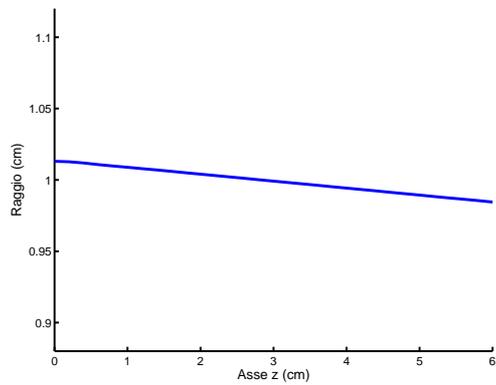


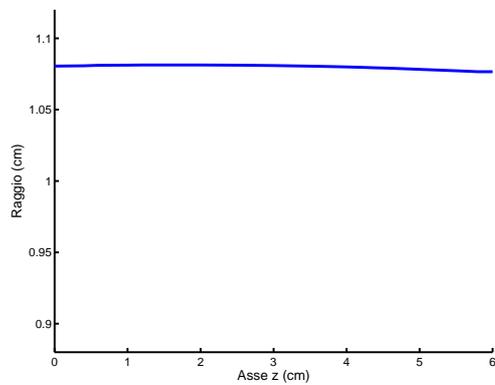
Figura 5.5: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria



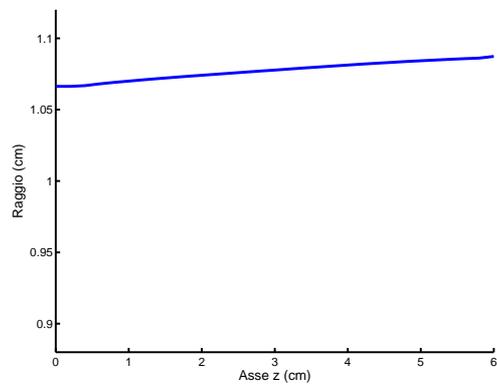
$t = 0.03$ s



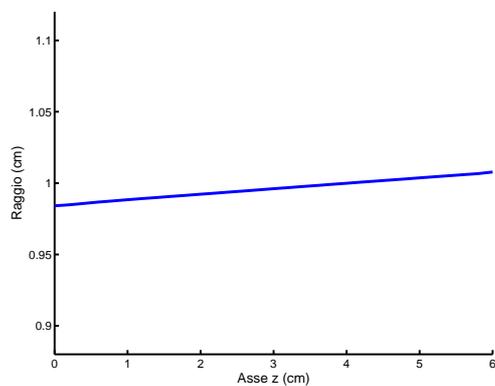
$t = 0.06$ s



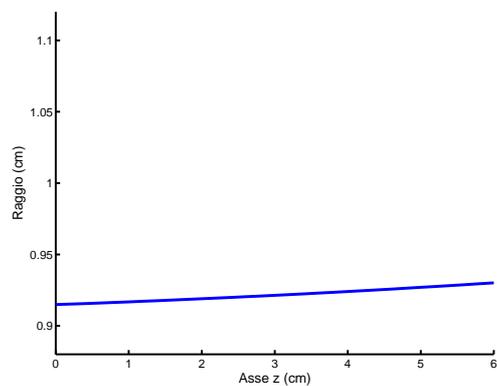
$t = 0.09$ s



$t = 0.12$ s



$t = 0.15$ s



$t = 0.18$ s

Figura 5.6: Raggio dell'arteria in istanti successivi di tempo

5.2 Arteria con protesi vascolare

Si considera in questa Sezione il modello introdotto nel Capitolo 2 per la geometria di figura 5.7.

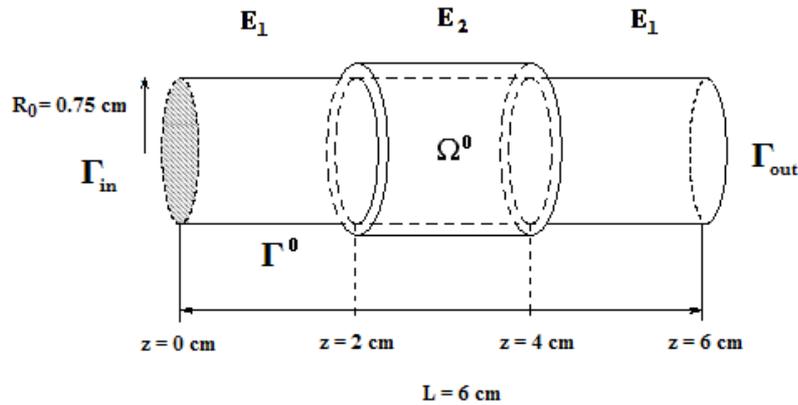


Figura 5.7: Modello di arteria con protesi vascolare

Le proprietà meccaniche della struttura considerata sono riportate in Tabella 5.5.

Parametro	Valore numerico
Lunghezza arteria L	6.0 cm
Raggio R_0	0.75 cm
Spessore arteria h_s	0.065 cm
Densità ρ_s	$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Modulo di Young arteria E_1	$4.8 \cdot 10^6 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$
Modulo di Poisson arteria ν	$\frac{1}{3}$
Lunghezza protesi l	2.0 cm
Spessore protesi h_p	0.065 cm
Modulo di Young protesi E_2	$3.0 \cdot 10^{10} \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$
Modulo di Poisson protesi ν_p	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.5: Parametri fisici della struttura

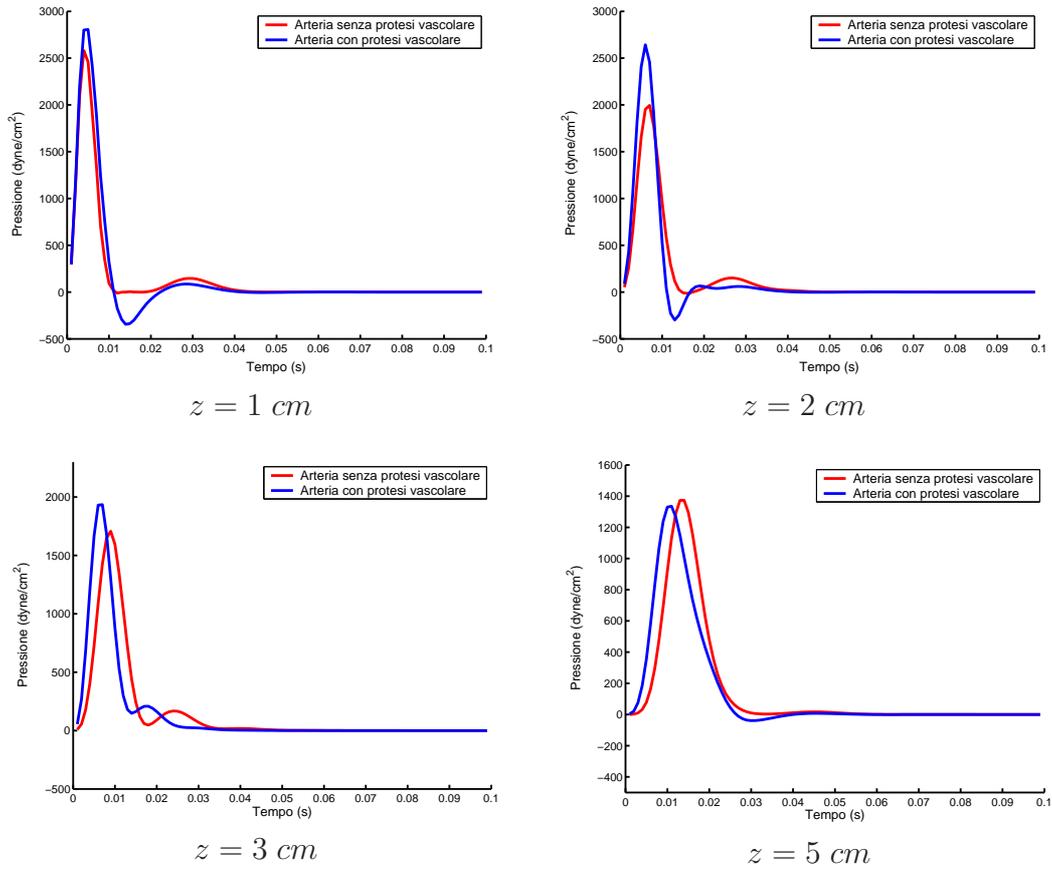


Figura 5.8: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

Le proprietà del fluido e i parametri numerici fissati per la simulazione sono riportati rispettivamente nella Tabella 5.2 e nella Tabella 5.3 nella Sezione precedente.

In Figura 5.8 è riportato l'andamento della pressione nel tempo in sezioni successive di arteria ottenuto imponendo come condizione al bordo su Γ_{in} la (5.1), cioè un breve impulso di pressione seguito dalla condizione assorbente di Neumann. Come è possibile osservare dal confronto con i risultati ottenuti in assenza della protesi vascolare, la discontinuità del Modulo di Young della parete dell'arteria genera delle riflessioni che sono particolarmente evidenti nelle sezioni che precedono la protesi ed all'interno della protesi stessa.

E' possibile anche notare come il cambiamento della rigidità della struttura modifichi la velocità di propagazione dell'onda di pressione all'interno dell'arteria. Mentre nelle sezioni che precedono la protesi la celerità è identica nelle due simulazioni, come evidenziato in Figura, in corrispondenza dell'inizio della protesi la velocità di propagazione dell'onda aumenta ed il picco di pressione è in anticipo rispetto al caso in cui il Modulo di Young si mantiene costante. La celerità dell'onda che si propaga in un condotto deformabile, infatti, è legata alla rigidità E della struttura dalla relazione seguente

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon R}{h_s E}}}$$

dove ε è il coefficiente di comprimibilità del fluido. All'aumentare del Modulo di Young E la velocità di propagazione dell'onda di pressione aumenta, come mostrato dalle simulazioni.

Si riporta nei grafici di figura 5.9 l'andamento della pressione nell'arteria con la protesi vascolare in successivi istanti temporali, confrontata con i risultati ottenuti nel caso di arteria senza protesi.

Come è possibile osservare l'andamento della pressione nella porzione in cui la parete è più rigida diventa lineare. Anche in questi grafici, come in quelli di figura 5.8, si nota come l'onda di pressione nell'arteria soggetta a protesi sia in anticipo rispetto a quella nell'arteria con Modulo di Young costante.

Particolarmente significativi sono i grafici di figura 5.10, dove è riportato il confronto tra la deformazione della parete vascolare rispettivamente in presenza ed in assenza della protesi. Questa, oltre a generare riflessioni dell'onda di pressione come già sottolineato, causa la deformazione anomala della parete vascolare nei punti di giunzione tra il tessuto naturale e la protesi. Data l'entità di tali deformazioni è possibile supporre che lo sforzo a cui è sottoposto il tessuto vascolare possa causare la lacerazione della parete. Questo rischio potrebbe essere evitato grazie all'utilizzo di materiali artificiali con rigidità minore.

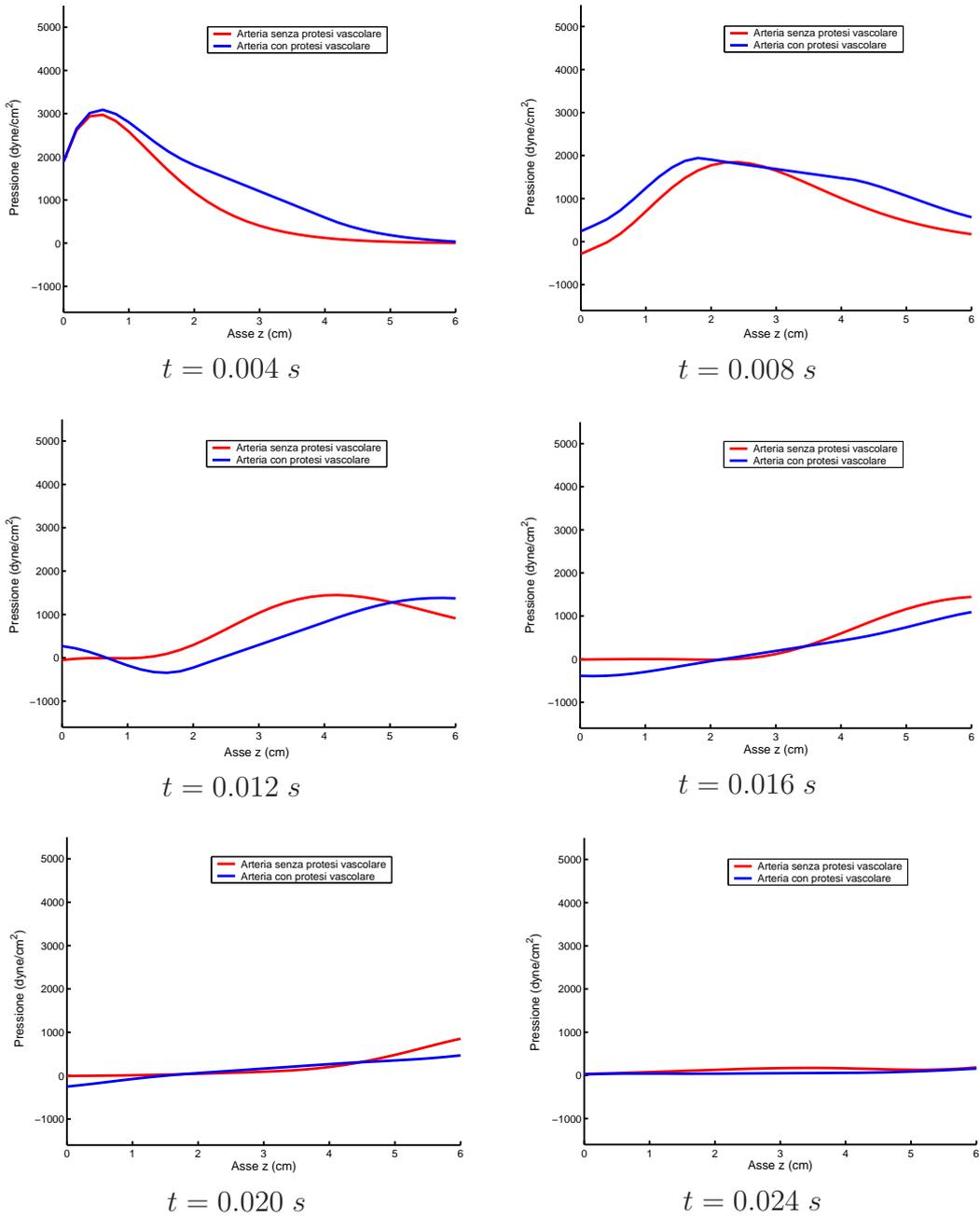


Figura 5.9: Pressione media nel vaso sanguigno in istanti temporali successivi

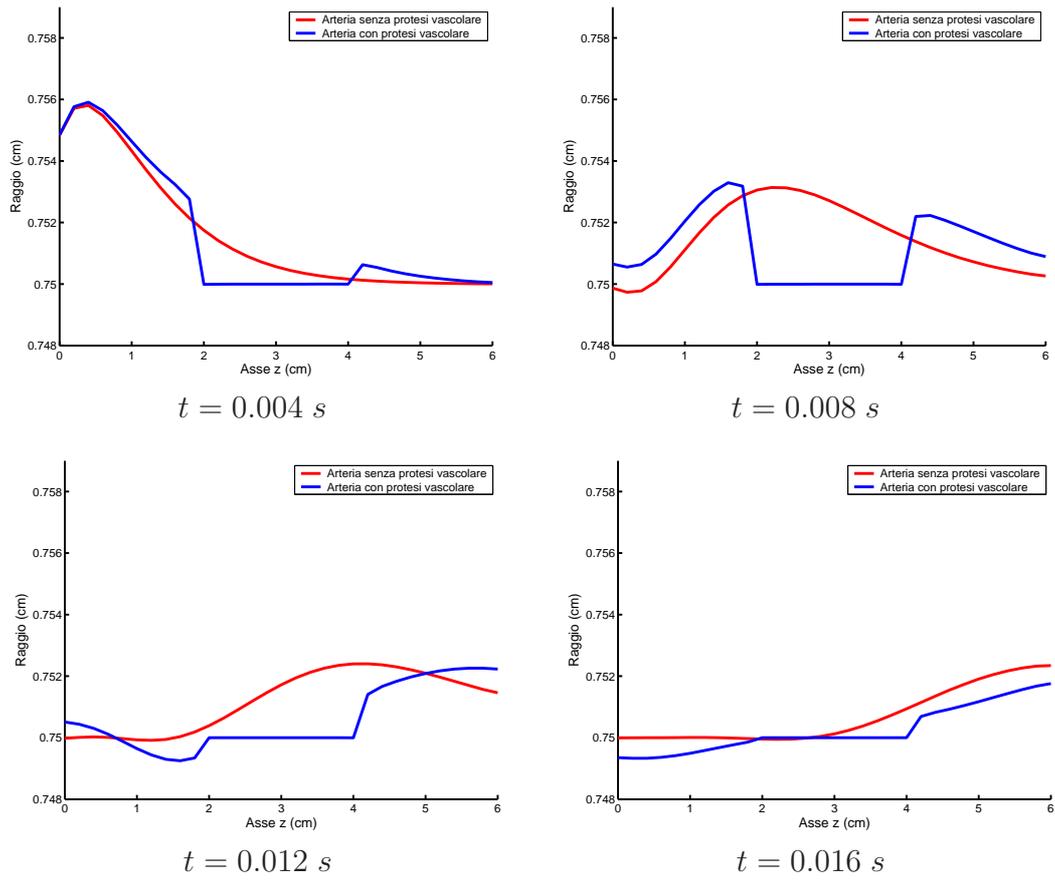


Figura 5.10: Raggio dell'arteria in istanti successivi di tempo

5.3 Arteria con restringimento

Si consideri ora il caso di arteria soggetta a tapering, come mostrato in Figura 5.11.

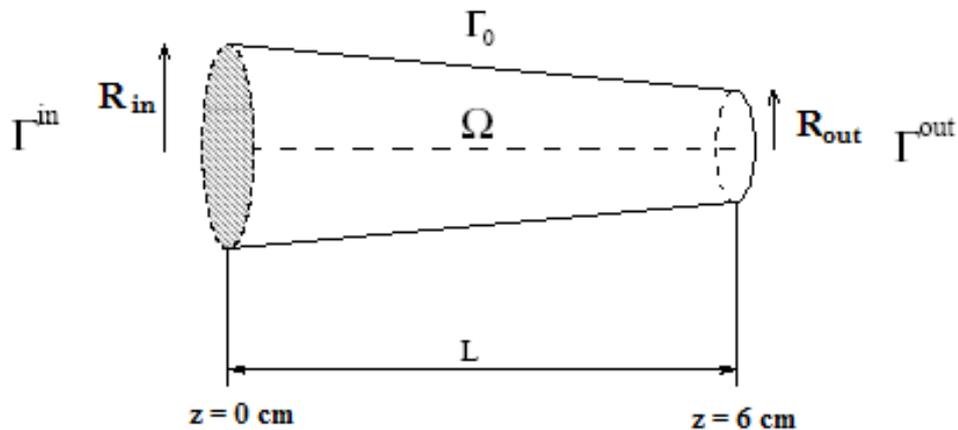


Figura 5.11: Modello di arteria con restringimento

Si considerino inoltre i parametri per la struttura riportati in Tabella 5.6, mentre i parametri fisici relativi al fluido ed i parametri numerici della simulazione rimangono invariati.

Parametro	Valore numerico
Lunghezza arteria L	6.0 cm
Raggio in ingresso R_{in}	0.75 cm
Raggio in uscita R_{out}	0.5 cm
Spessore arteria h_s	0.065 cm
Densità ρ_s	$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Modulo di Young arteria E_1	$4.8 \cdot 10^6 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$
Modulo di Poisson arteria ν	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.6: Parametri fisici della struttura

Nei grafici di figura 5.12 è riportato l'andamento della pressione nel tempo in sezioni successive.

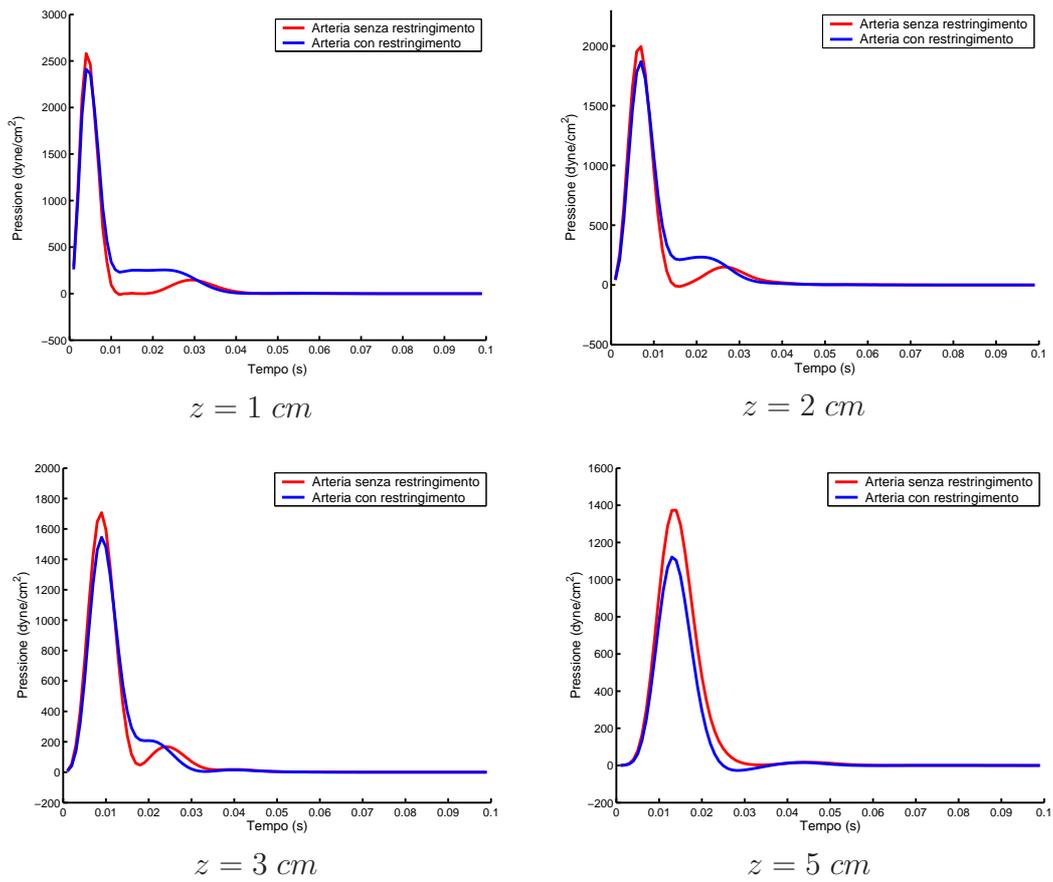


Figura 5.12: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

E' possibile osservare che, nonostante non siano state prescritte condizioni al bordo *ad hoc* che tenessero in considerazione l'effetto di un restringimento, le riflessioni spurie risultano essere comunque limitate. In prima approssimazione, dunque, sono sufficienti le condizioni assorbenti presentate nella Sezione 1.5. Si riportano nelle figure 5.13 e 5.14 i grafici relativi all'andamento dello spostamento della parete dell'arteria e alla pressione in istanti successivi di tempo, confrontati con i corrispondenti grafici ottenuti in assenza del tapering.

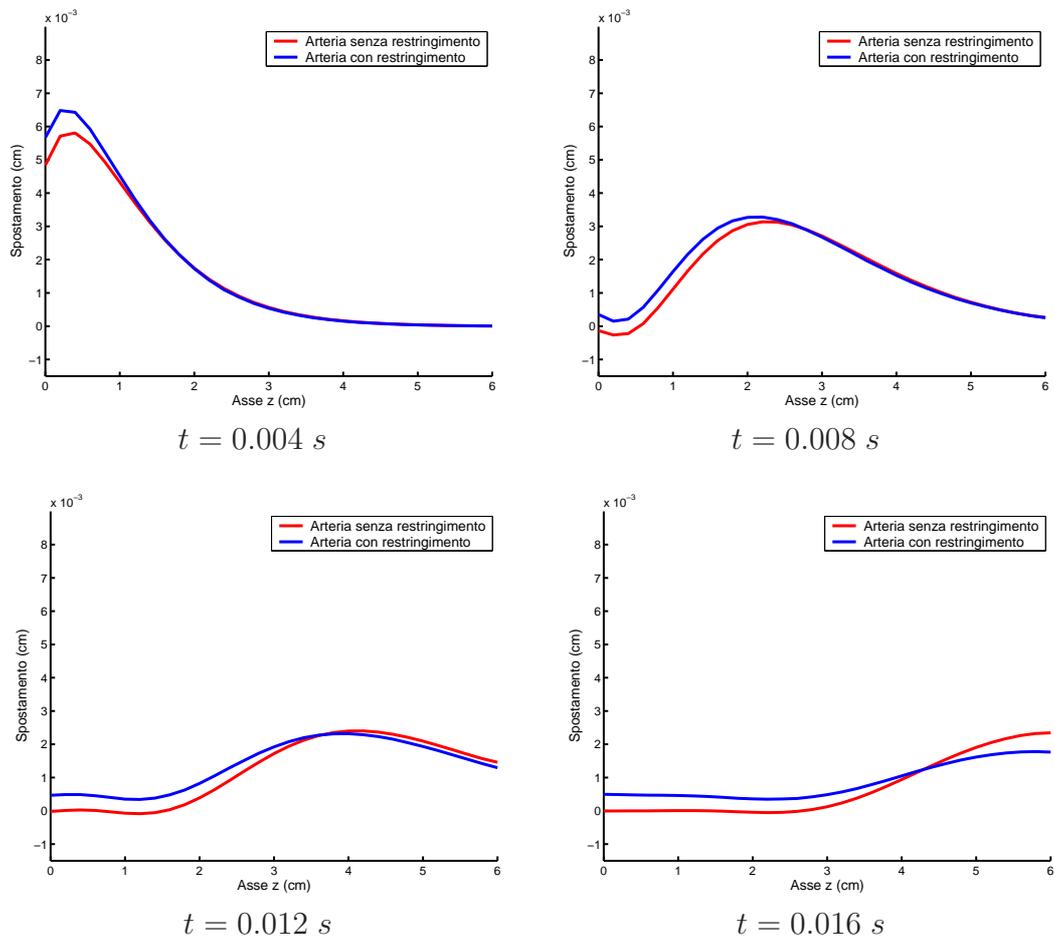


Figura 5.13: Spostamento della parete dell'arteria in istanti successivi di tempo

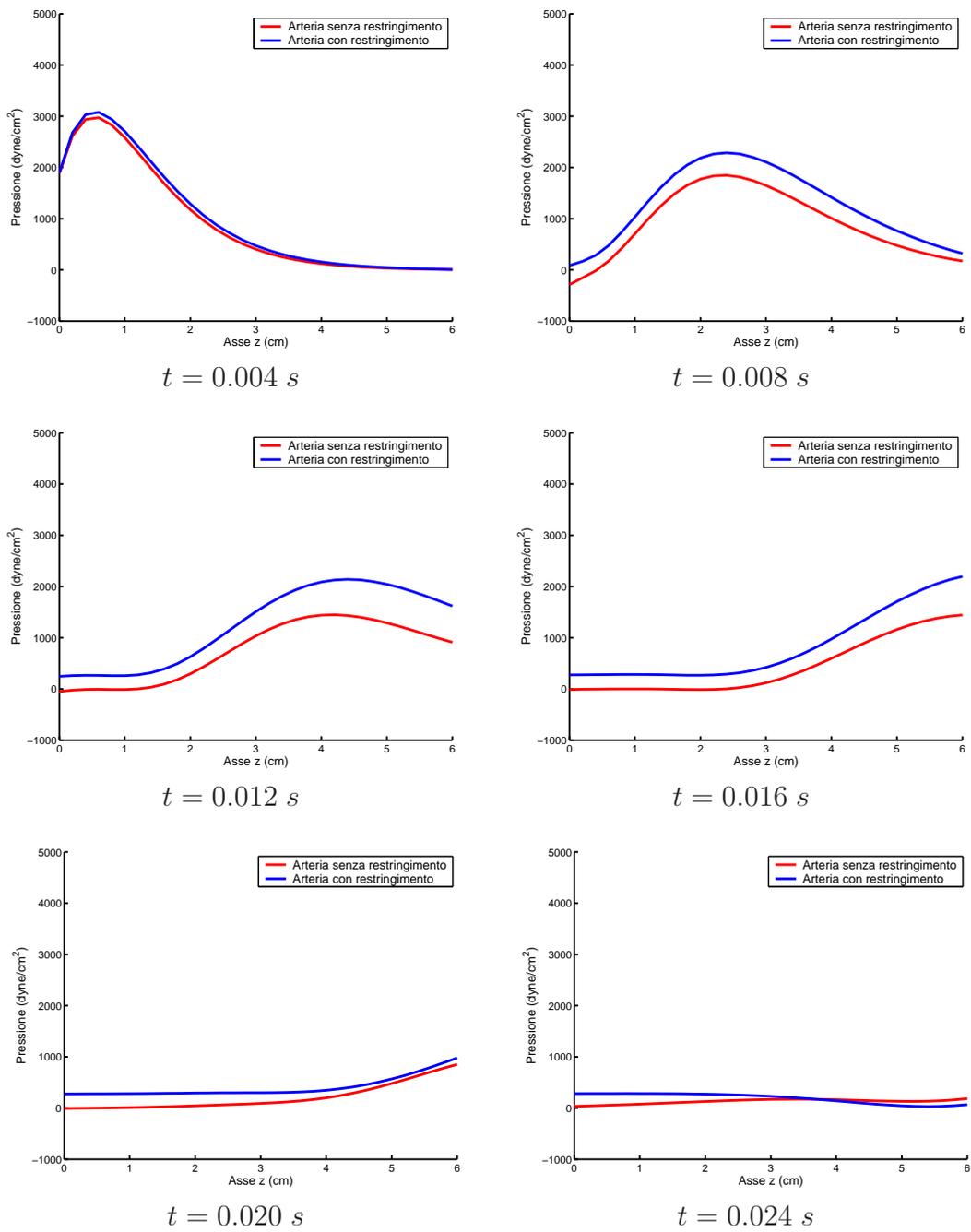


Figura 5.14: Pressione media nel vaso sanguigno in istanti temporali successivi

Si consideri ora il modello di arteria mostrato in Figura 5.15 nel quale si è prolungato il vaso mantenendo l'inclinazione della parete precedente: i nuovi parametri del modello sono riportati in Tabella 5.7.

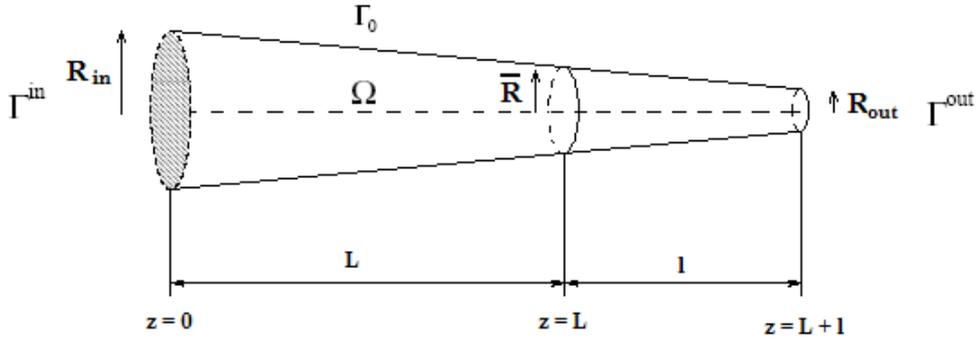


Figura 5.15: Arteria con prolungamento-tapering

Parametro	Valore numerico
Lunghezza arteria L	6.0 <i>cm</i>
Lunghezza prolungamento l	6.0 <i>cm</i>
Raggio in ingresso R_{in}	0.75 <i>cm</i>
Raggio intermedio \bar{R}	0.5 <i>cm</i>
Raggio in uscita R_{out}	0.25 <i>cm</i>
Spessore arteria h_s	0.065 <i>cm</i>
Densità ρ_s	1 $\frac{g}{cm^3}$
Modulo di Young arteria E_1	$4.8 \cdot 10^6 \frac{dyne}{cm^2}$
Modulo di Poisson arteria ν	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.7: Parametri fisici della struttura

L'andamento della pressione media è mostrato nei grafici riportati in Figura 5.3, dove viene anche proposto il confronto con i risultati ottenuti nella simulazione precedente nella quale l'arteria soggetta a tapering non è stata prolungata.

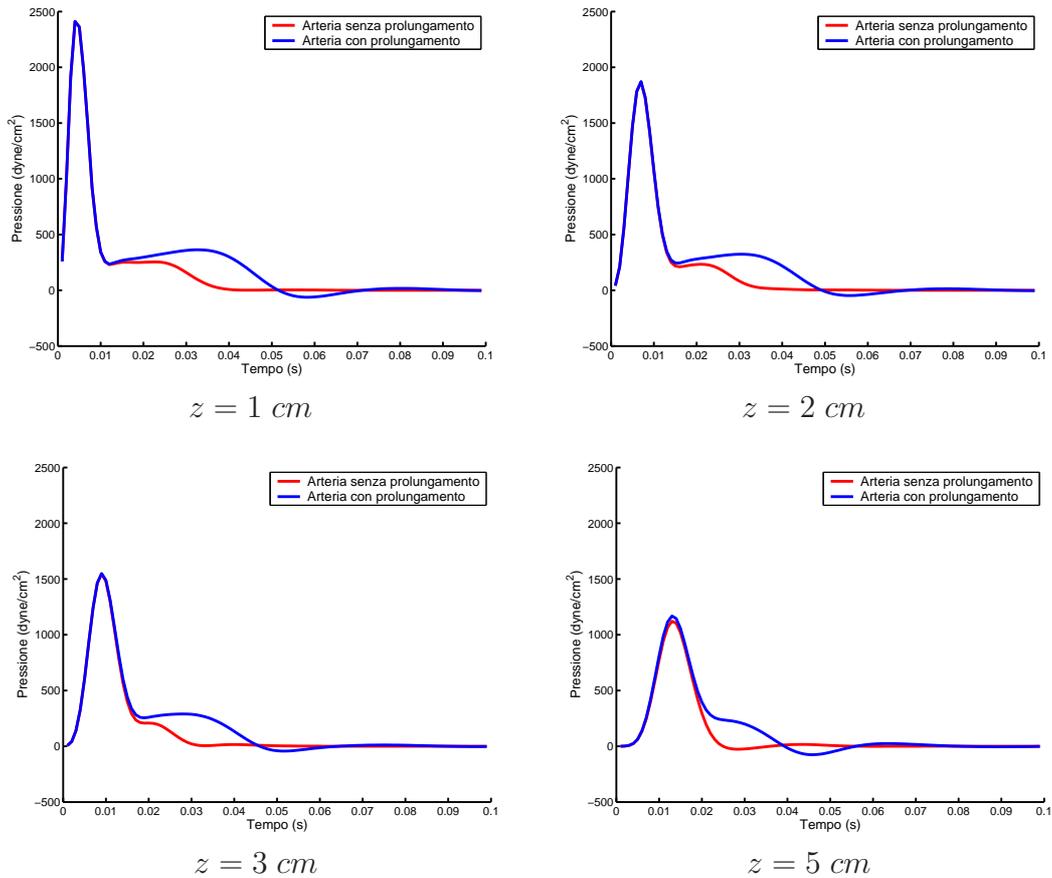


Figura 5.16: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

E' possibile osservare che, come era possibile intuire, l'entità delle riflessioni aumenta se si va a prolungare il restringimento: infatti alle sovrappressioni generate nel primo tratto di arteria si vanno a sovrapporre le riflessioni generate nel secondo tratto.

Dai grafici proposti in Figura è possibile osservare che la condizione al bordo assorbente imposta in corrispondenza della sezione Γ_{out} del modello di arteria soggetta a tapering di figura 5.11 non è corretta nel caso in cui si desideri simulare la presenza, a valle dell'arteria, di un prolungamento anch'esso soggetto a tapering.

Si supponga ora di prolungare l'arteria con un tratto di vaso a raggio costante, come mostrato in Figura 5.17: i parametri fisici della struttura sono riportati in Tabella 5.8.

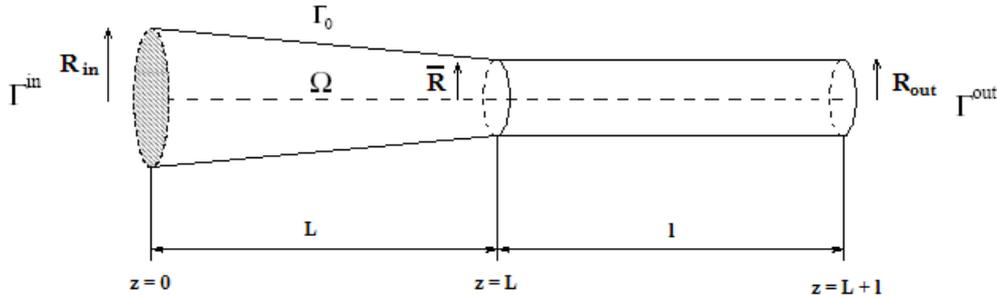


Figura 5.17: Arteria con prolungamento a raggio costante

Parametro	Valore numerico
Lunghezza arteria L	6.0 <i>cm</i>
Lunghezza prolungamento l	6.0 <i>cm</i>
Raggio in ingresso R_{in}	0.75 <i>cm</i>
Raggio intermedio \bar{R}	0.5 <i>cm</i>
Raggio in uscita R_{out}	0.5 <i>cm</i>
Spessore arteria h_s	0.065 <i>cm</i>
Densità ρ_s	1 $\frac{g}{cm^3}$
Modulo di Young arteria E_1	$4.8 \cdot 10^6 \frac{dyne}{cm^2}$
Modulo di Poisson arteria ν	$\frac{1}{3}$

Tabella 5.8: Parametri fisici della struttura

Si vuole valutare se le condizioni al bordo assorbenti imposte su Γ_{out} nel modello di arteria non prolungato di Figura 5.11, simulano la presenza, a valle del vaso, di un prolungamento a raggio costante, come mostrato in Figura 5.17

Al fine di valutare la validità delle nostre ipotesi, si considerano modelli di arteria che differiscono per il valore di l , cioè per la lunghezza del prolungamento a raggio costante.

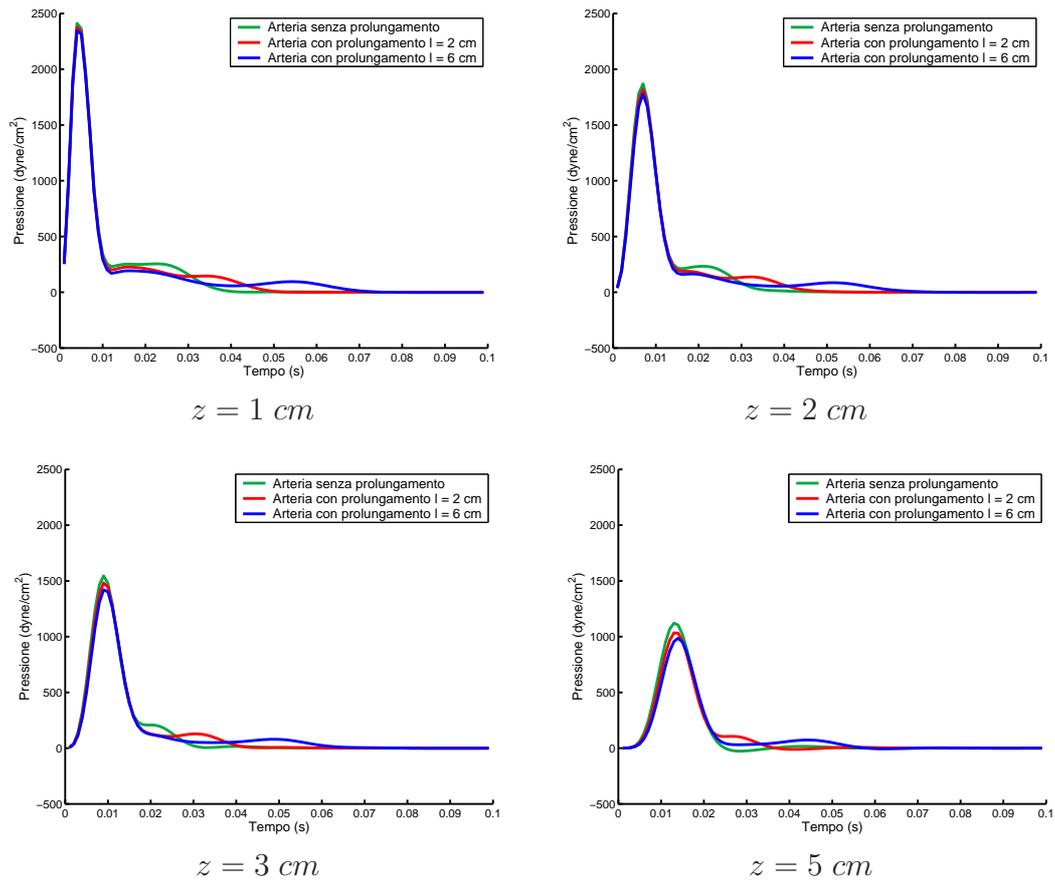


Figura 5.18: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

E' possibile osservare che è presente un lieve sfasamento delle riflessioni spurie, dovute al restringimento, proporzionale alla lunghezza del prolungamento l , mentre l'intensità delle riflessioni non risulta essere ridotta in modo rilevante.

Si riporta nei grafici di figura 5.19 il confronto tra la simulazione ottenuta con il modello di figura 5.11 nel quale l'arteria con il restringimento non è prolungata, il modello di figura 5.15 nel quale l'arteria è prolungata con un tratto anch'esso soggetto a tapering ed il modello di figura 5.17 nel quale il prolungamento ha raggio costante.

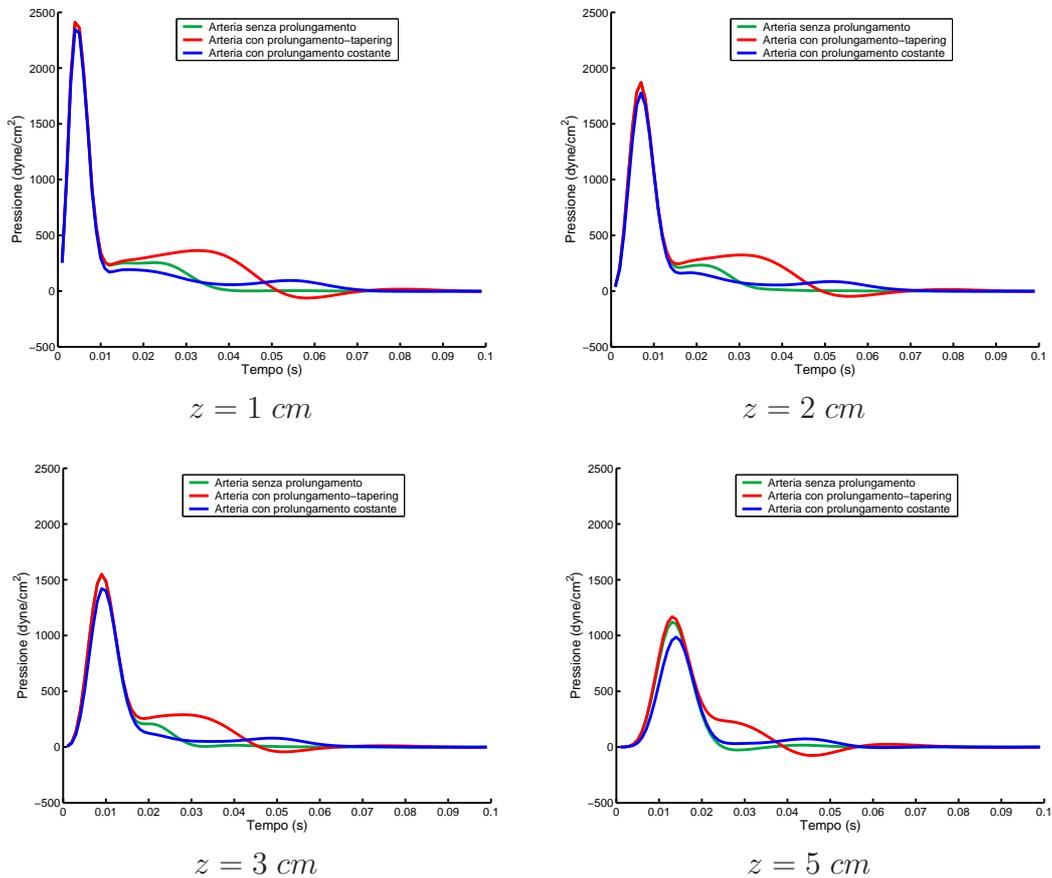


Figura 5.19: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

E' possibile osservare che la presenza del prolungamento soggetto a tapering influenza in modo rilevante l'entità delle riflessioni. Rimane dunque aperto il problema della corretta formulazione di condizioni al bordo che simulino, a valle dell'arteria, la presenza di un prolungamento soggetto a tapering. Si può notare, viceversa, che esiste una maggiore corrispondenza tra gli andamenti delle pressioni ottenuti con i modelli di figura 5.11 e 5.17: in questi due casi le riflessioni spurie, nonostante siano ancora presenti, sono comunque molto limitate, come accadeva nel modello di arteria non soggetto a tapering.

5.4 Accoppiamento 3D/0D

Si consideri ora il modello multiscala 3D/0D presentato nel Capitolo 3, rappresentato in Figura 5.20.

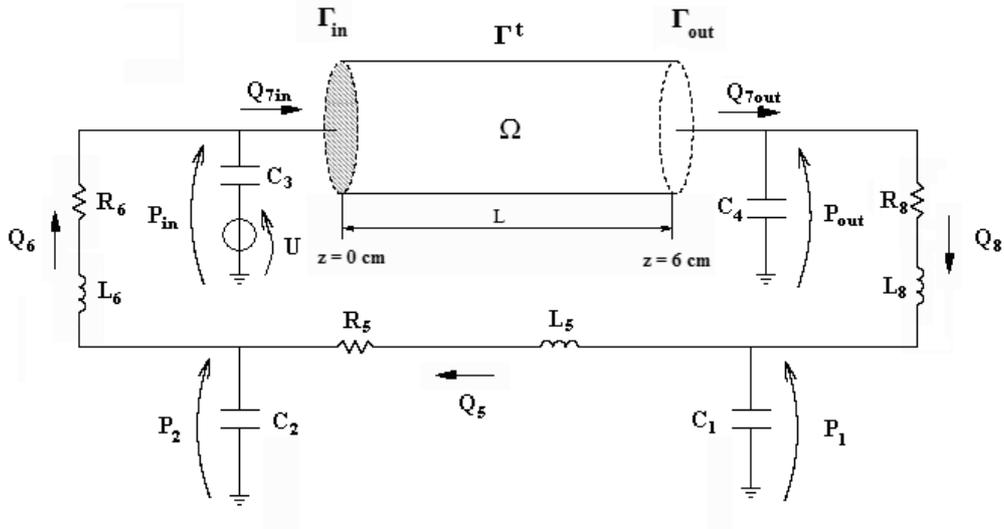
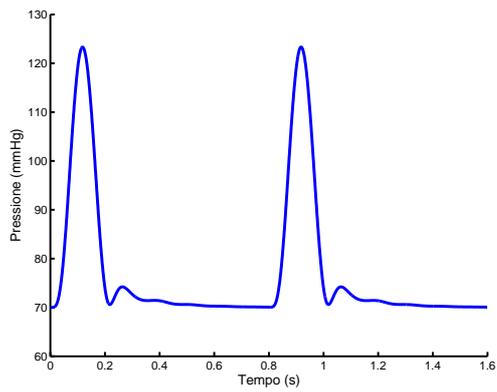


Figura 5.20: Modello multiscala 3D/0D

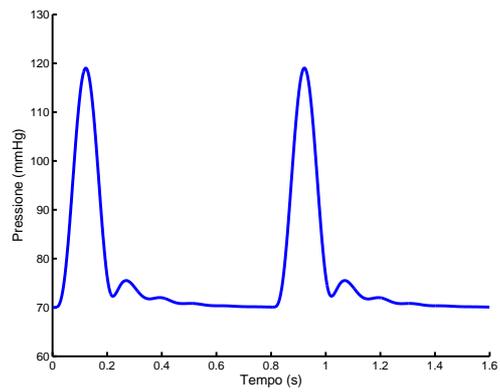
Le pressioni calcolate accoppiando il modello tridimensionale ed il modello a parametri concentrati con la strategia proposta nel Capitolo 3 sono riportate in Figura 5.21. Come ingresso U è stato posto

$$U(t) = \begin{cases} 70 + 25 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi t}{0.1} \right) \right) \text{ mmHg} & \text{per } t \leq 0.2 \text{ s} \\ 70 \text{ mmHg} & \text{per } 0.2 < t < 0.8 \text{ s.} \end{cases} \quad (5.3)$$

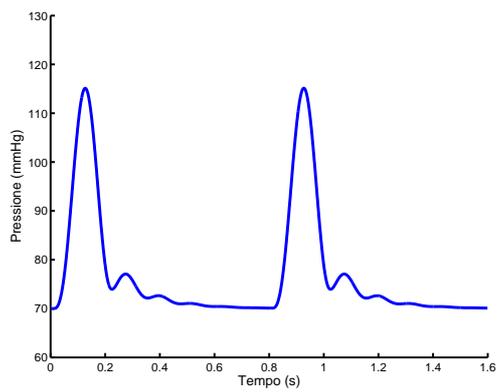
Come è possibile osservare, il modello a parametri concentrati è in grado di prescrivere condizioni al bordo assorbenti per il problema fluido-struttura.



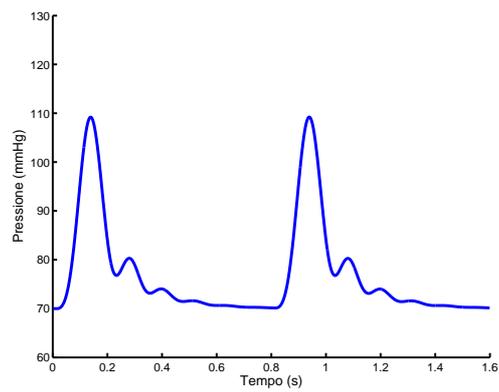
$z = 1 \text{ cm}$



$z = 2 \text{ cm}$

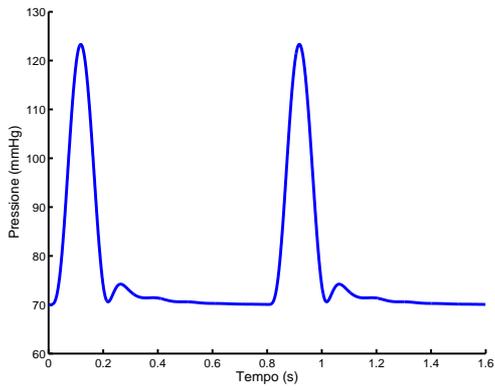


$z = 3 \text{ cm}$

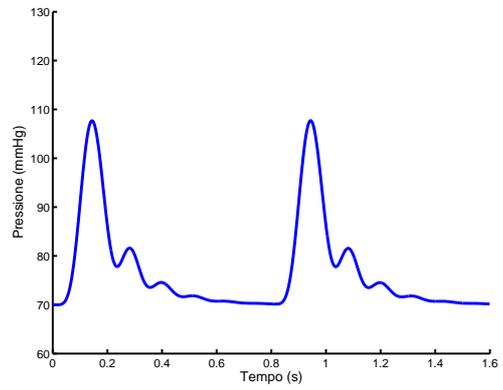


$z = 5 \text{ cm}$

Figura 5.21: Andamento della pressione media in sezioni successive dell'arteria

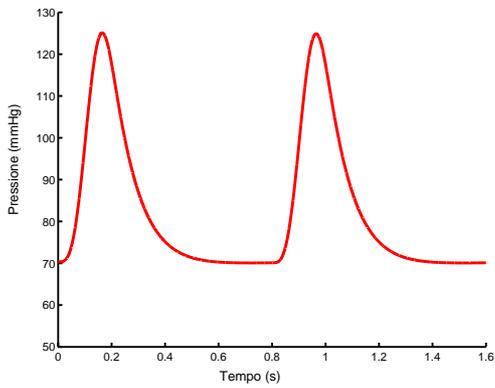


$z = 0 \text{ cm}$

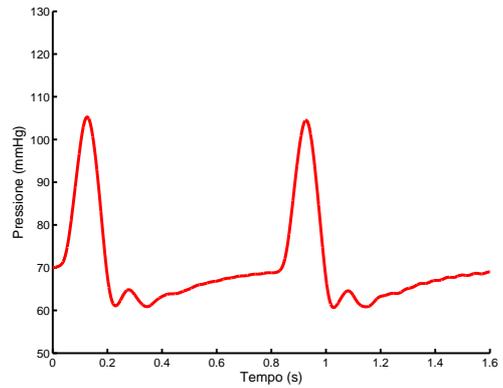


$z = 6 \text{ cm}$

Figura 5.22: Pressioni calcolate con il modello 3D/0D



$z = 0 \text{ cm}$



$z = 6 \text{ cm}$

Figura 5.23: Pressioni calcolate con il modello 0D

E' possibile osservare che le pressioni calcolate con il modello accoppiato 3D/0D e con il modello 0D, sostanzialmente, hanno lo stesso andamento ed i valori massimi raggiunti dalla pressione in corrispondenza delle sezioni di ingresso e di uscita dell'arteria trattata corrispondono.

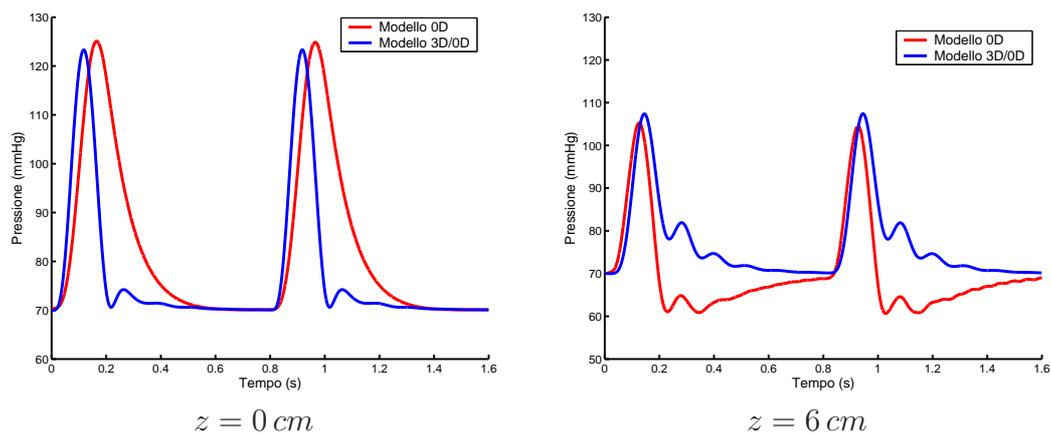


Figura 5.24: Confronto tra i due modelli

Bibliografia

- [1] Deparis S., Discacciati M., Fourestey G., Quarteroni A., Fluid-structure algorithms based on Steklov-Poincaré operators, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195 (2006), 5797-5812.
- [2] Deparis S., Fernandez M.A., Formaggia L., Acceleration of a fixed point algorithm for a fluid-structure interaction using transpirations conditions, *M2AN Math. Model. Num. Anal.*, 37(4) 2003, 601-616.
- [3] Donea J., An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, (1982), 689-723.
- [4] Fernandez M.A., Moubachir M., A Newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling, *Comp. and Struct.*, 83(2-3) (2005), 127-142.
- [5] Formaggia L., Gerbeau J.F., Nobile F., Quarteroni A., On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191 (2001), 561-582.
- [6] Formaggia L., Nobile F., Stability analysis of second order time accurate schemes for ALE-FEM, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (2004), 4097-4116.
- [7] Formaggia L., Nobile F., A stability analysis for the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation with finite elements, *East-West J. Numer. Math.*, (1999), 105-131.
- [8] Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A., Multiscale modeling of the circulatory system: a preliminary analysis, *Comp. Vis. Sc.*, 2 (1999), 75-83.

- [9] Formaggia L., Veneziani A., Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system, Lecture Notes, VKI Lecture Series, 2003.
- [10] Gerbeau J.F., Vidrascu M., A quasi-Newton algorithm based in a reduced model for fluid-structure problem in blood flows, *M2AN Math. Model. Num. Anal.*, 37(4) (2003), 631-647.
- [11] Haywood J.G., Rannacher R., Turek S., Artificial Boundary and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Int. Journ. Num. Meth. Fluids*, 22 (1996), 325-352.
- [12] Hughes T.J.R., Liu W.K., Zimmermann T.K., Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flow, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, (1981), 329-349.
- [13] Koiter W.T., On the non-linear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Neder. Akan. Wet.*, B69 (1996), 1-54.
- [14] Koiter W.T., On the foundation of the linear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Neder. Akan. Wet.*, B73 (1970), 169-195.
- [15] Le Tallec P., Mouro J., Fluid-structure interaction with large structural displacements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190 (2001), 3039-3067.
- [16] Matthies H., Steindorf J., Numerical efficiency of different partitioned methods for fluid-structure interaction, *Z. Angew. Math. Mech.*, 2(80) (2000), 557-558.
- [17] Mittal S., Tezduyar T.E., Parallel finite element simulation of 3D incompressible flows: fluid-structure interactions, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 21 (1995), 933-953.
- [18] Moura A., Vergara C., Flow rate boundary conditions and multiscale modelling of the cardiovascular system in compliant domains, *Modelling in Medicine and Biology VI* (2005).
- [19] Nobile F., Numerical Approximation of Fluid-Structure Interaction Problems with Application to Haemodynamics, Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, 2001.
- [20] Nobile F., Vergara C., An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalized Robin conditions, accepted for publication on *SIAM J. Sc. Comp.* (2007).

- [21] Pedley T.J., *The Fluid Mechanics of large blood vessels*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [22] Quarteroni A., Formaggia L., *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System*, in *Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis*, Ayache N, Ciarlet PG, Lions JL (eds), Elsevier Science, Amsterdam, 2003.
- [23] Quarteroni A., Veneziani A., *Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of ODE's and PDE's for blood flow simulations*, *SIAM Mult. Mod. Sim.*, 1(2) (2003).